

नवी भूमिति

भाग १ लो

ગુજરાત વિદ્યાપીઠ ગ્રંથાલય

| ગુજરાત કૉપીગ્રાફ્ટ વિભાગ |

અનુક્રમાંક

કિંમત

ગ્રંથનામ

ચર્ચાક

DEPARTMENT OF PUBLIC INSTRUCTION, BOMBAY.

NEW GEOMETRY

PART I.

BY

Balkrishna Shridhar Kolatkar, L. Ag.,
First Asst. D. E. Inspector, Nasik,

AND

Ramchandra Janardan Gokhale, B. A.,
Teacher, Training College for Men, Poona.

Translated into Gujarati

BY

Ganesh Bachaji Sapre, B. A., S. T. C.,

AND

Manmohandas Dalpatram Dalal, B. A., S. T. C.,
Teachers, P. R. Training College, Ahmedabad.

3RD EDITION.

7000 COPIES.

PUBLISHED BY

Karsandas Narandas & Sons,
BOOKSELLERS & PUBLISHERS, SURAT.

All rights reserved.

1918.

PRICE 10 ANNAS.

Published by
Karsandas Narandas & Sons.
Nanavat, SURAT.

Printed by
Thakordas Mansing at the Surat City Printing Press,
near Chauta Bridge, opp. Post Office, Surat.

મુંબઈ ધલાકાનું સરકારી કેળવણી ખાતું.

નવી ભૂમિતિ

ભાગ ૧લો.



મૂળ લેખક,

બાળકૃષ્ણ શ્રીધર કોલટકર, એલ્. એલ.,
ફર્સ્ટ આ. ડે. એ. ઇન્સ્પેક્ટર, નાસિક,
અને

રામચંદ્ર જનાર્દન ગોખલે, બી. એ.,
શિક્ષક, ટ્રેનિંગ કોલેજ ફાર મેન, પુના.

અનુવાદક,

ગણેશ બચાજ સપ્તે, બી. એ, એસ. ટી. સી.,
અને

મનમોહનદાસ દલપતરામ દલાલ, બી. એ., એસ. ટી. સી.,
શિક્ષક, પ્રેમચંદ રાયચંદ ટ્રેનિંગ કોલેજ, અમદાવાદ.

આવૃત્તિ ૩જી.

પ્રત-૭૦૦૦.

સને ૧૯૧૮.

છપાવી પ્રસિદ્ધ કરનાર,

કરસનદાસ નારણદાસ એન્ડ સન્સ,
નાણાવટ, મુરત.

સરકારે સર્વ હક સ્વાધીન રાખ્યા છે.

કિં. ૦-૧૦-૦.

ગુજરાત વિધાપીઠ પ્રકાશક
અમદાવાદ
ગુજરાતી કૌપીરાઈટ-સંગ્રહ
૭૮૧૬

મુરત ચૌદાના પૂલ ઉપર પોસ્ટ ઓફિસની સામે
“ મુરત સીટી ” પ્રિન્ટિંગ પ્રેસમાં
ડાકેરદાસ માનસિંહે છાપ્યું.

પ્રસ્તાવના.

ટ્રેનિંગ કોલેજના નવા કોડ પ્રમાણે ટ્રેનિંગ કોલેજમાં 'નવી ભૂમિતિ' * શીખવવી જરૂરની છે; તેથી આ વિષય શીખવવામાં વિદ્યાર્થીઓને મદદ મળે એ હેતુથી અમે આ પુસ્તક લખ્યું છે.

આ પુસ્તક કોઈ પણ અંગ્રેજી ગ્રંથનું ભાષાંતર નથી, પણ તે અંગ્રેજીમાંના કેટલાક ગ્રંથોને આધારે લખેલું છે. નવી ભૂમિતિમાં પ્રાયોગિક ભાગ વિશેષ મહત્ત્વનો છે, અને તેનો યોગ્ય ઉપયોગ કરવાથી વિદ્યાર્થીઓને આ વિષય સુલભ થવાનો સંભવ છે; તેથી તેનો વિશેષ વિસ્તાર કર્યો છે.

આ પુસ્તક તૈયાર કરવાના કામમાં મેસર્સ ગોડફ્રે અને સિડ્નસ, બર્નાર્ડ અને ચાઇલ્ડ, પિયરપોઇટ, એંગર વગેરે ગ્રંથકારોના અંગ્રેજી ગ્રંથો તેમજ દેવકુળેકૃત મરાઠી ભૂમિતિ ઘણી ઉપયોગી થઈ પડી છે. એ માટે આ સર્વે ગ્રંથકારોના પ્રસ્તુત ગ્રંથકાર ઘણા આભારી છે.

ગ્રંથકર્તા.

* નવી ભૂમિતિ—નવી ભૂમિતિની યોજના કોઈ અસુક ગણિત-શાસ્ત્રીએ કરેલી નથી, પણ અનેક ગણિતશાસ્ત્રના શોધકોના પ્રયત્નથીજ તેણે હાલનું સ્વરૂપ ધારણ કર્યું છે; એ વાત ધ્યાનમાં રાખવી જોઈએ. આ નવી ભૂમિતિ જર્મનિ અને ફ્રાન્સ એ દેશોમાં ઘણા વખત પહેલાં દાખલ થઈ હતી, અને ઇંગ્લાંડમાં તે થોડાજ વખત પર દાખલ થઈ છે. આ યોજનાને અનુસરીનેજ કેળવણીખાતાએ આ દેશમાં નવી ભૂમિતિ દાખલ કરી છે.

શિક્ષકોને સૂચના.



જે શિક્ષકોને આ વિષય છેક નવો છે, તેમણે આગળ આવતા ઉપોદ્ધાતમાં આપેલી નવી ભૂમિતિ સંબંધી માહિતી, ધ્યાન દઈને વાંચવી, અને તે યાદ રાખી આ વિષય શીખવવો. શીખવતી વખતે નીચેની બાબતો હંમેશાં ધ્યાનમાં રાખવી:—

(૧) આકૃતિના ધર્મો અનુમાનદ્વારા શીખવતા પહેલાં છોકરાઓ પાસે આકૃતિ કઢાવીને અને તેની બાજુઓ, ખુણા વગેરે મપાવીને તે ધર્મો પ્રત્યક્ષ જોવરાવવાની જરૂર છે; તેથી ૯ થી ૧૧૬ સુધીનાં પાનાંમાંનો પ્રાયોગિક ભાગ કાળજીપૂર્વક શીખવવો જોઈએ.

(૨) આકૃતિઓ સંબંધી અથવા પ્રમેયો સંબંધી પ્રત્યક્ષ પ્રયોગ કર્યા પછી, જે ધર્મો છોકરા પાસે કઢાવ્યા હોય, તે તેમને નોંધપોથીમાં નોંધી રાખવા કહેવું.

(૩) આકૃતિઓના ધર્મ અથવા પ્રમેયો બરાબર સમજવા માટે આકૃતિઓ બરાબર કાઢવી જરૂરની છે; માટે ભૂમિતિ શીખવતી વખતે શિક્ષકે આકૃતિઓ પાટીઆ પર બરાબર કાઢવી. તેમજ જે આકૃતિઓ છોકરાઓએ કાઢવાની હોય, તે પણ તેમની પાસે સાધનોની મદદથી ભૂલ ન થાય એવી રીતે કઢાવવી. આકૃતિ બરાબર કાઢેલી હોય તો પ્રમેય વધારે સહેલાઈથી સમજી શકાય.

(૪) સર્વ વ્યાખ્યાઓ સામટી શીખવવાને બદલે જેમ જેમ તેમની જરૂર જણાય તેમ તેમ તે એક પછી એક શીખવવી. વ્યાખ્યાઓ સામટી શીખવી હોય તો તેમનો ખપ પડતા સુધીમાં તે ભૂલી જવાનો સંભવ રહે છે; તેથી આ યોજના જરૂરની છે.

(૫) વ્યાખ્યાઓ છોકરાઓને કહી દેવી નહિ, પણ ચોપડીમાં બતાવ્યા પ્રમાણે પ્રયોગ કરી છોકરાઓ પાસે તે કઢાવવી. વ્યાખ્યા

છોકરાઓ પાસે કઢાવવી શક્ય ન હોય તો તે જુદી જુદી આકૃતિઓની મદદથી છોકરાઓને સ્પષ્ટ રીતે સમજાવવી. છોકરાઓને વ્યાખ્યાઓની સમજણ પડ્યા પછી તેમને લગતી આકૃતિઓ તેમની પાસે કઢાવવી તથા ઓળખાવવી.

(૬) જે પ્રમેયો વિદ્યાર્થીઓને શીખવવાના હોય છે, તેમની સત્યતા જોડે પહેલાં પ્રાયોગિક ભાગ શીખવતી વખતેજ તેમના ધ્યાનમાં આવી ગઈ હોય છે, તોપણ તે ભૂલી જવાનો સંભવ રહે છે. તેથી દરેક પ્રમેય શીખવતા પહેલાં તેની સત્યતાનો અનુભવ (પહેલાં એક વખતે તેમણે કર્યો હતો તેમ) પ્રત્યક્ષ પ્રયોગથી કરી કરાવવો, અને તેવો અનુભવ કરાવ્યા પછી “ હવે એજ બાબત આપણે અનુમાનથી સિદ્ધ કરીએ ” એમ કહી અનુમાનની મદદથી સિદ્ધતા શરૂ કરવી.



અનુક્રમણિકા.

પૃષ્ઠ.

ઉપોદ્ધાત	૧-૮
ખંડ ૧લો (પ્રાયોગિક ભાગ)...	૯-૧૧૬

પ્રકરણ ૧લું.

૧ લીટીઓ માપવા વિષે	૧૦
૨ સ્કેલ કે અંતરપ્રમાણ	૧૬
૩ ખુણો... ..	૨૧
૪ સાક્ષેપ દિશા	૪૨
૫ અમુક અંશનો ખુણો કરવા વિષે	૪૪
૬ એક લીટી બીજી પર પડવાથી થતા ખુણા.	૪૬
૭ એક બીજીને છેદતી બે સીધી લીટીઓની વચ્ચેના ખુણા	૫૦
૮ સમાંતર લીટીઓ.	૫૨
૯ ત્રિકોણ	૬૩
૧૦ લંબ	૮૮
૧૧ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ	૯૨

પ્રકરણ ૨જું.

ભૂમિતિ એટલે શું ?	૧૦૦
પદાર્થ	૧૦૧
લંબાઈ, પહોળાઈ, અને જડાઈ	૧૦૨
પૃષ્ઠ	૧૦૨
સપાટ પૃષ્ઠ અને વક્ર પૃષ્ઠ... ..	૧૦૫
સપાટી	૧૦૬
લીટી... ..	૧૦૮
બિંદુ	૧૧૪
ખંડ ૨જો (પ્રમેય ૧-૨૫)...	૧૧૭-૧૭૫
ખંડ ૩જો (કૃત્ય ૧-૧૩)...	૧૭૭-૧૮૭
પરિશિષ્ટ અ (પરચુરણ પ્રશ્ન)	૧૮૭-૨૦૮
પરિશિષ્ટ બ (પ્રશ્ન છોડવાની પૃથક્કરણપદ્ધતિ)...	૨૦૯-૨૧૫
પ્રશ્નોના ઉત્તરો	૨૧૬

શુદ્ધિપત્ર.

પૃષ્ઠ.	લીટી.	અશુદ્ધ.	શુદ્ધ.
૨૨	૧૫	થએલો	થએલો
૪૦	૪	દશાવેલ	દશાવેલ
૪૪	૫	ખુટાથી	ખુટાથી
૪૯	૨	દરેક	ત્રણે
૪૯	બીજી આકૃતિમાં ૧ અને ૩ ની વચ્ચે		૨
૪૯	૮	ખુણો	ખુણા
૬૧	૯	સરખા	સરખા હોય
૬૫	૫	થાય	થયા
૧૦૧	૭	મે	નિયમે
૧૦૫	૨૬	એ	એક
૧૧૮	૬	આગળના	આગળનાં
૧૨૧	૩	કર્યો	કર્યો
૧૨૩	૨	અને	અને ૩
૧૨૬	૧૨	::	::
૧૨૬	૧૬	::	::
૧૨૯	૮	::	::
૧૩૪	૧૭	સીધી લીટી	સીધીલીટી
૧૩૫	૧૯	ઈ	∠ઈ
૧૩૮	૧૬	લીટી	નારી લીટી
૧૩૮	૧૯	બાણુના	બાણુનાં
૧૩૮	૨૦	ત્રિકોણના	ત્રિકોણનાં
૧૫૩	૧૪	૧૬મે	૧૬મું
૧૫૯	૨૬	થમેથ	પ્રમેથ
૧૬૫	૧૫	બીજી	બીજી
૧૮૧	૧૯	પર્દ	ફર્દ
૧૮૩	૨૨	ઈમાં	ઈમાં
૧૮૭	૭	માંગેલો	માંગેલો
૧૮૭	૧૬	પેડી	પેડી

ઉપોદ્ધાત.



નવી ભૂમિતિનાં ખાસ લક્ષણો નીચે પ્રમાણે છે:—

(૧) આકૃતિના ધર્મ (પ્રમેય-સિદ્ધાંત) અનુમાનથી સિદ્ધ કરતા પહેલાં પ્રત્યક્ષ પ્રયોગ ઉપરથી તેમની સત્યતાની ખાતરી કરી આપવામાં આવે છે.

(૨) વ્યાખ્યા અને પ્રમેય-સિદ્ધાંત (પ્રમેયમાંના સામાન્ય નિયમો) વિગમનપદ્ધતિથી (વિશેષ દૃષ્ટાંતો પરથી સામાન્ય નિયમ ઉપર ઉતરવાની રીતથી) શીખવવાનો પ્રયત્ન કર્યો છે.

(૩) સિદ્ધાંતોનો ક્રમ યુક્તિરૂપી સહેજ જુદો છે; કેટલેક ઠેકાણે સિદ્ધતા પણ જુદી રીતે આપી છે; અને યુક્તિરૂપમાંના કેટલાક બહુ જરૂરના ન હોય એવા સિદ્ધાંતો કાઢી નાખ્યા છે.

(૪) આકૃતિઓ ખરાબર દોરવી ઘણી અવશ્યની ગણી છે.

આ ફેરફાર કરવાનાં કારણો નીચે પ્રમાણે છે:—

(૧) ફોટો શી રીતે લેવો તેની માહિતી આપણને કોઈ મોઢેથી આપે, તો તે ખરાબર સમજાશે નહિ એટલુંજ નહિ, પણ તે થોડાજ વખતમાં ભૂલી જવાશે. તે તેજ માહિતી આપણને પ્રત્યક્ષ પ્રયોગ વડે કોઈએ આપી હોય, તો તે સારી રીતે સમજાશે, અને તે ઓછામાં ઓછા એક અઢવાડીઆ સુધી તો ભુલાશે નહિ. પણ તેજ પ્રયોગ આપણે પોતાને હાથે કરીએ, તો તે બાબત ઉત્તમ પ્રકારે સમજાશે એટલુંજ નહિ, પણ તે આસરે એક વરસ સુધી યાદ રહેશે. કોઈ બાબતનું વર્ણન સાંભળવાથી, તે પ્રત્યક્ષ જોવાથી, અને તે જાતે કરવાથી, એ ત્રણ પ્રકારે મળતા જ્ઞાનમાં આવો તફાવત પડે છે. કોઈ પણ પ્રકારના જ્ઞાનને આ નિયમ લાગુ પડે છે. આ ઉપરથી એવો સામાન્ય નિયમ નીકળે છે, કે કોઈ પણ વસ્તુનું જ્ઞાન એકલા વર્ણનથી થાય છે, તે કરતાં વધારે જ્ઞાન તે વસ્તુ પ્રત્યક્ષ જોવાથી થાય છે,

અને તેથી પણ વધારે જ્ઞાન તે વસ્તુ પ્રત્યક્ષ પોતાને હાથે કરવાથી, અથવા તે વસ્તુનો ઉપયોગ પોતાને હાથે કરવાથી થાય છે. તેથી જ્ઞાન પાડું થાય અને મનમાં ખરાબર હસે એટલા માટે પ્રયોગ વિધાર્થી-એ જાતે કરવા અવશ્યના છે. ભૂમિતિનાં સત્યો વ્યવહારમાં આપણી નજરે પડતાં ન હોવાથી તેમને દૃશ્ય રૂપમાં જોવાની આવશ્યકતા વિશેષ છે. એમ હોવાથી પહેલાં આ વિષય કેવળ વ્યાખ્યાનદ્વારા શીખવાતો હતો તેથી શું પરિણામ આવતું હતું તે આપણે સૌ જાણીએ છીએ. ભૂમિતિ એ વિષય ઘણોજ કઠણ ગણાતો હતો એ વાતજ ખાતરીપૂર્વક સિદ્ધ કરી આપે છે, કે આ વિષય શીખવવાની જુની પદ્ધતિ અયોગ્ય અને કઠણ હતી. ‘કાટખુણો’ ‘સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ’ વગેરે સંજ્ઞામાં, અથવા ‘ત્રિકોણના ત્રણ ખુણા મળીને એ કાટખુણા બરાબર હોય છે.’ એવા એકાદ સિદ્ધાંતમાં રહેલી કલ્પના “પ્રત્યક્ષ આકૃતિથી અને પ્રયોગથી સ્પષ્ટ કરી બતાવો” એમ કહ્યું હોત, તો (યુક્લિડના ૧લા પુસ્તકના ૩૨ સિદ્ધાંત જેમને ચાહ્યા છે એવા વિધાર્થીઓ પૈકી) કેટલા થોડા વિધાર્થીઓ એવા પ્રશ્નનો સંતોષકારક જવાબ આપી શકત એ વાતનો વિચાર કરીએ તો જુની પદ્ધતિ કેટલી અયોગ્ય હતી એ સમજી શકાશે. આ પદ્ધતિને લીધે છોકરાઓનું આકૃતિના ધર્મેનું જ્ઞાન ઘણુંજ અધુરું રહેતું અને ઘણો ખરો વિષય તેમને જોખવો પડતો હતો. આ સ્થિતિ દૂર કરવા માટે, આકૃતિના સંબંધમાં છોકરાઓ પાસે પ્રત્યક્ષ પ્રયોગ કરાવવા એજ એક ઉપાય છે. સમાંતર લીટીઓને છેદતી લીટીથી થતા વ્યુત્ક્રમ ખુણા સરખા હોય છે, એ વાત યુક્લિડના ૨૮મા સિદ્ધાંતની શાબ્દિક સિદ્ધતા કહ્યા પછી જેટલી યાદ રહેશે, તે કરતાં તે ખુણા સરખા હોય છે એ વાત પ્રત્યક્ષ પ્રયોગથી બતાવી હોય તો વધારે સારી રીતે યાદ રહેશે; અને તેજ વાતની ખાતરી વિધાર્થીઓ પોતાને હાથે કરેલા પ્રયોગ વડે કરી જુએ, તો પાકી ધ્યાનમાં રહેશે એ તદ્દન ખુલ્લું છે. આ ઉપરથી ભૂમિતિના નિયમો ધ્યાનમાં રાખવામાં વિધાર્થીઓએ જાતે કરેલા પ્રયોગ તેમને મદદ કરે છે એ નિર્વિવાદ છે. તેથી આકૃતિઓ

બરાબર કાઢવી અને તેમના ધર્મ તપાસી જોવા એ એ બાબતને નવી ભૂમિતિમાં પ્રાધાન્ય આપવામાં આવ્યું છે.

(૨) વિગમનપદ્ધતિની મદદથી વ્યાખ્યાઓનું અને સિદ્ધાંતોનું જ્ઞાન આપવા વિષે.—પારિભાષિક સંજ્ઞા અને સિદ્ધાંતોના સાધારણ ખ્યાલ આવે તે માટે તે સંજ્ઞાઓ તથા સિદ્ધાંતોમાં દર્શાવેલી બાબતોનું પ્રત્યક્ષ અવલોકન જેમ આવશ્યક છે, તેમજ તે સંબંધનું જ્ઞાન પાકું થાય અને લાંબા વખત સુધી ટકે તે માટે તે બાબતોનું અવલોકન કર્યા પછી છોકરાઓએ પોતેજ માનસિક પ્રયત્ન કરવાની જરૂર છે. આપણે જાણીએ છીએ કે જે વાતો આપણે પોતાની ખુદ્દિના શ્રમથી શીખીએ છીએ, તે આપણને બરાબર સમજાય છે એટલુંજ નહિ, પણ તે પાકી ધ્યાનમાં રહે છે; અને જે વાતો આપણે બીજા લોકો પાસેથી શીખીએ છીએ તે તેટલી સારી પેઠે સમજાતી નથી, અને તે આપણા ધ્યાનમાં લાંબો વખત રહેતી પણ નથી. છોકરાઓના મનની સ્થિતિ પણ એવીજ હોય એ સ્વાભાવિક છે; એટલે જે જ્ઞાન છોકરા પોતાના શ્રમથી મેળવે છે તે તેમના મનમાં બરાબર ઠસે છે; માટે વ્યાખ્યા અને સિદ્ધાંતનું જ્ઞાન ચાલતાં સુધી છોકરા પોતાની મહેનતથી મેળવે એમ કરવું. એમ કરવાનો યોગ્ય માર્ગ એ છે, કે જે વસ્તુઓના ધર્મોનું જ્ઞાન છોકરાઓને આપવું હોય, તે વસ્તુઓના જુદા જુદા પ્રકાર છોકરા આગળ મૂકવા, અને છોકરાઓ પાસે તેમની સરખામણી કરાવીને તે ઉપરથી થતાં અનુમાન છોકરા પાસે કઢાવવાં. એટલા માટે નવી ભૂમિતિમાં વ્યાખ્યા શીખવવાની પદ્ધતિ એવી છે, કે જે આકૃતિની વ્યાખ્યા છોકરાઓને શીખવવી હોય, તે આકૃતિ તેમની પાસે કઢાવીને તેની બાજુઓ, ખુણા, વગેરે ભાગોની પરીક્ષા તેમનીજ પાસે કરાવવી; પછી તેજ જાતની બીજા પ્રકારની આકૃતિઓ કઢાવીને તેમની એક બીજા સાથે સરખામણી કરાવવી; અને આ સરખામણી પરથી જે સામાન્ય ધર્મ જણાઈ આવે તેની મદદથી વ્યાખ્યા ઉપજાવવી. પ્રમેયોનું બરાબરું

નક્કી કરવાની રીત પણ એવીજ છે; એટલે પ્રમેયોના અનેક પ્રત્યક્ષ દાખલા લેવા અને તે પરથી સામાન્ય સિદ્ધાંત નક્કી કરવો.

કોઈ પણ નિયમ કે સિદ્ધાંત નક્કી કરવાની બે પદ્ધતિ છે, એક, બીજા સામાન્ય નિયમોને આધારે તે નિયમ નક્કી કરવાની; અને બીજી, પ્રત્યક્ષ વિશેષ દાખલાઓ વડે તે નિયમ નક્કી કરવાની. આ પૈકી હમણાં ઉપર વર્ણવી તે પદ્ધતિ બીજા પ્રકારની છે. પહેલી પદ્ધતિમાં દોષ એ છે, કે શબ્દોના અર્થના અનિશ્ચિતપણાને લીધે અને જે સામાન્ય નિયમના આધારે અમુક નિયમ નક્કી કરવાનો હોય તેને અપવાદ હોવાથી, તેમજ જુદાં જુદાં વિધાનો (કહેલી બાબતો) ઉપરથી નિર્દોષ અનુમાન શી રીતે કાઢવું એ વિષેના (લોકોના) અજ્ઞાનને લીધે, આ પદ્ધતિથી નક્કી કરેલો સિદ્ધાંત કોઈ કોઈ વખત ખોટો પડે છે. પરંતુ બીજી પદ્ધતિમાં ઉદાહરણો ઉપરથી સિદ્ધાંત ઠેરવવાનો હોવાથી, જોઈ એ તેટલાં જુદાં જુદાં ઉદાહરણો લીધાં હોય તો સિદ્ધાંત ખોટો ઠરવાનો સંભવ ઘણો થોડો હોય છે. માટે ખરો સિદ્ધાંત ઉપજાવવાને આ પદ્ધતિ ખાસ ઉપયોગી છે. તે ઉપરાંત આ પદ્ધતિમાં પ્રત્યક્ષ ઉદાહરણો ઉપરથી સિદ્ધાંત ઉપજાવવાનો હોવાથી સિદ્ધાંત સહેલાઈથી સમજી શકાય છે. માટે આ પદ્ધતિની માહિતી અને વિશેષ પરિચય થવાની જરૂર છે, તેથી આ પદ્ધતિનો ઉપયોગ નવી ભૂમિતિમાં કર્યો છે.

જો કે ખરો સિદ્ધાંત નક્કી કરવા માટે નિગમનપદ્ધતિ (સામાન્ય નિયમ પરથી વિશેષ નિયમ ઉપજાવવાની પદ્ધતિ) કરતાં વિગમનપદ્ધતિ વધારે ઉપયોગી છે, તોપણ એટલા ઉપરથીજ નિગમનપદ્ધતિ છેક નકામી ઠરતી નથી. કારણ ઘણી વાર એવું બને છે કે પહેલી પદ્ધતિથી સિદ્ધાંત નક્કી કરવાને જે ઉદાહરણો જરૂરનાં છે તે કોઈ કોઈ વખતે તો મળતાં પણ નથી, અને કોઈ કોઈ વખતે મળી શકે એમ હોય તોપણ તે જોવાને પુરતો વખત હોતો નથી. એવે વખતે અનુમાનથીજ સિદ્ધાંત નક્કી કરવો પડે છે. ન્યાયાધીશને ચુકાદો આપવાના કામમાં, તેજ પ્રમાણે

ઐતિહાસિક શોધ કરનારને, ભૂસ્તરશાસ્ત્રીને, તેમજ ખગોળશાસ્ત્રીને ભૂતકાળની અને અદ્યત્ત વાતો વિષે સિદ્ધાંત નક્કી કરવાના કામમાં આ પદ્ધતિ ખાસ ઉપયોગી થાય છે. પોતાની પાસે થોડાજ વખત પર આવેલો કોઈ માણસ કેવાં લક્ષણવાળો હશે, ક્યારે જન્મ્યો તેા અમુક માણસ નક્કી ઘેર મળશે,.....વગેરે રોજના વ્યવહારમાંની વાતો અનુમાનથીજ નક્કી કરવી પડે છે. તેથી આ પદ્ધતિની પણ માહિતી અને પરિચય હોવાં જરૂરનાં છે; માટે યુક્લિડની ભૂમિતિમાંની અનુમાનપદ્ધતિ પણ નવી ભૂમિતિમાં કાયમ રાખી છે.

સારાંશ એ છે કે નિયમ બરાબર સમજાય અને મનમાં બરાબર ઠસે એટલા માટે પ્રથમ વિગમનપદ્ધતિનો ઉપયોગ કરવો, અને પહેલાં નક્કી કરેલા સામાન્ય નિયમ ઉપરથી બીજા સિદ્ધાંતો, નિયમો, અથવા અનુમાનો શી રીતે કાઢવાં તે છોકરાઓ સમજે એટલા માટે પછીથી વિગમનપદ્ધતિનો ઉપયોગ કરવો, એવી વ્યવસ્થા નવી ભૂમિતિમાં છે.

(૩) ક્રમ વગેરે બાબતોમાં યુક્લિડથી જુદાપણું.—

અસાધારણ બુદ્ધિવાળા કોઈ પણ પુરુષે કરેલું કામ સર્વ અંગે પરિપૂર્ણ હોયજ એમ નથી. માણસે કરેલું કામ ગમે તેટલું ઉત્કૃષ્ટ હોય, તોપણ તેમાં દોષ હોવાનાજ. હોમર, શેક્સ્પિયર, કાળિદાસ એમનાં કાવ્યો અને પ્લેટો, એરિસ્ટોટલ, ડાર્વિન, સ્પેન્સર, ભાસ્કરાચાર્ય, પાણિનિ ઇત્યાદિ પંડિતોના તાત્ત્વિક અને શાસ્ત્રીય ગ્રંથો પોતાની જાતના ગ્રંથોમાં જો કે અદ્વિતીય છે, તોપણ તેમાં સહેજસાજ દોષો કે ખામીઓ છેજ. તેવીજ રીતે કેટલાક દોષ યુક્લિડની ભૂમિતિમાં પણ છે. તોપણ યુક્લિડમાં કેટલાક દોષ છે એ વાતથી યુક્લિડની યોગ્યતા ઓછી થતી નથી. એક બુદ્ધિમાન ઇંગ્લેન્ડે એકાદ વિકટ ઘાટમાંનો રસ્તો ગમે તેટલી કુશળતાથી તૈયાર કર્યો હોય, તોપણ તે રસ્તામાં પાછળથી થોડો ઘણો ફેરફાર કરવાની જરૂર પડે છેજ. તેમજ સ્થિતિ યુક્લિડની ભૂમિતિની છે. યુક્લિડે સિદ્ધાંતોનો જે ક્રમ ઠેરવ્યો છે તે જો કે એકંદરે સારો છે, તોપણ તેમાં કેટલેક ઠેકાણે ફેરફાર કરવો જરૂરનો જણાયો છે.

દાખલા તરીકે—યુક્તિહીન ૧લા પુસ્તકમાંના ૨ અને ૩ એ સિદ્ધાંતો કાઢી નાખીએ તોપણ ચાલે એમ છે. ચોથા અને પાંચમા સિદ્ધાંત કરતાં ૧૩, ૧૪, ૧૫, એ સિદ્ધાંતો સહેલા હોવાથી અને તે સીધી લીટી વિષેના હોવાથી તે પહેલાં લેવા એ વધારે સગવડ ભરેલું છે. તેમજ યુક્તિહીન પહેલા પુસ્તકમાંના ૮મો સિદ્ધાંત અને બીજા પુસ્તકનો ૧૩મો સિદ્ધાંત, એમના જે સિદ્ધતા યુક્તિએ આપી છે, તેના કરતાં નવી ભૂમિતિમાં આપ્યા મુજબ સહેલી સિદ્ધતા આપવી બની શકે એમ છે.....વગેરે. એ પ્રમાણે યુક્તિહીન ભૂમિતિમાં ફેરફાર કરવો અવશ્ય છે, એ કોઈ પણ નેઈ શકશે. આ કારણથી, જે ફેરફાર કરવાથી વિષય સહેલો થાય એમ લાગ્યું તેવા ફેરફાર નવી ભૂમિતિમાં કર્યા છે.

(૪) કંપાસ અને માપવાની પટ્ટી વગેરેની મદદથી આકૃતિ બરાબર કાઢવા વિષે:—

આકૃતિના ધર્મ નક્કી કરવા એ ભૂમિતિનું મુખ્ય કામ છે. જે આ વિષયમાં ‘સમબાણુ ત્રિકોણના ખુણા સરખા હોય છે,’ ‘આ ખુણો પેલા ખુણાથી મોટો છે,’ ‘આ લીટી પેલી લીટીથી મોટી છે,’ વગેરે બાબતો સિદ્ધ કરવી હોય, તો એવી સરખામણી કરવા માટે આ આકૃતિઓ બરાબર કાઢવી જરૂરની છે, એ કોઈ પણ સમજી શકશે. સમબાણુ ત્રિકોણ, લંબચોરસ, ત્રિકોણમાંની મધ્યગા, સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણ, વગેરે આકૃતિઓ બરાબર કાઢી હોય, તો સમબાણુ ત્રિકોણના ખુણા સરખા હોય છે, લંબચોરસના કર્ણ સમાન હોય છે, ત્રિકોણની મધ્યગાઓ એકજ બિંદુમાં એક બીજાને છેદે છે, સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણના કર્ણ એક બીજાને દુભાગે છે. એ વગેરે બાબતો તરતજ સમજાય છે. એથી ઉલટું, જે આકૃતિ બરાબર કાઢી ન હોય, તો ઉપલી બાબતો સહેજમાં સમજાતી નથી એટલુંજ નહિ, પણ જે બાબતો આપણે અનુમાનથી સિદ્ધ કરીએ છીએ, તેમના ખરાપણા વિષે પણ શંકા ઉત્પન્ન થાય છે. દાખલા તરીકે—‘એકજ ત્રિકોણમાંના સરખા ખુણાની સામેની બાણુઓ સરખા હોય છે,’ આ પ્રમેય સિદ્ધ કરતી વખતે

ખુણા સરખા કાઢેલા ન હોય તો તે ખુણાની સામેની બાજુએ નાની મોટી આવશે; અને તેમનું નાનામોટાપણું સ્પષ્ટ હોવાથી, આપણે તેમને સરખી કહીએ છીએ એ બરાબર છે કે કેમ, એવી શંકા, સ્વાભાવિક રીતે ઉત્પન્ન થશે. આ કારણથી આકૃતિઓ બરાબર કાઢવી જરૂરની છે.

આકૃતિઓ બરાબર કાઢવા માટે કંપાસ, માપવાની પટ્ટી, વગેરે સાધનોની આવશ્યકતા છે. તેથી આ સાધનોનો ઉપયોગ કરવો એ પણ નવી ભૂમિતિનું એક ખાસ લક્ષણ છે. યુક્લિડમાં કંપાસ અને આંકણી એ સાધનોથી આકૃતિઓ કાઢવાનું કહ્યું છે; પણ એવી આકૃતિઓ દોરી છે; એમ ધારી લેવાનો રિવાજ પડી ગયો હતો. નવી ભૂમિતિમાં તો એવી છૂટ આપવામાં આવતી નથી.

નવી ભૂમિતિનાં બીજાં (ગોણ) લક્ષણો નીચે મુજબ છે:-

(૧) કોઈ પણ વિધાનના આધાર માટે ‘ફલાણો સિદ્ધાંત’ એમ કહી સિદ્ધાંતનો ક્રમાંક આપવાની આ ભૂમિતિમાં આવશ્યકતા નથી. આધાર માટે સિદ્ધાંતનો ક્રમાંક કહેવાની પદ્ધતિને લીધે, અમુક સિદ્ધાંતમાં શું છે તેની દરકાર ન રાખતાં વિદ્યાર્થીઓ સિદ્ધાંતોના ક્રમાંક ગોખી રાખે છે. એનું પરિણામ એવું આવે છે, કે તેઓ જે વિધાન કરે છે તેને વાસ્તવિક રીતે ક્યાં કારણોનો આધાર છે તેનું તેઓને જ્ઞાન હોતું નથી. ‘ક્ષ ખુણો = ક્ષ ખુણો,—આધાર ૨૯મો સિદ્ધાંત’—એવું એક વખતે ગોખી રાખ્યું હોય, તો એક ખુણો બીજા ખુણા બરાબર છે એમ કહેવા માટે ક્યાં કારણોની જરૂર છે, એ વાત સારી પેઠે ધ્યાનમાં રહેતી નથી; અને બે વ્યુત્ક્રમ ખુણા ખરે જોતાં બરાબર ન હોય તોપણ તે બરાબર છે એમ ધારવાનું મનમાં આવ્યું, કે ૨૯મા સિદ્ધાંત પ્રમાણે તે બરાબર છે એવું એકદમ છોકરાના મોઢેથી નીકળી જાય છે. એમ ન થાય એટલા માટે આધાર આપતી વખતે છોકરાઓ પાસે સિદ્ધાંતનો ક્રમાંક કહેવડાવવાને બદલે જે પક્ષ ઉપરથી સાધ્ય નીકળે છે તે પક્ષ તેમની પાસે કહેવડાવવાની પદ્ધતિ નવી ભૂમિતિમાં છે. તોપણ આધાર હંમેશાં એવી

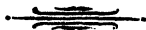
રીતે આપવોજ જોઈએ એમ નથી; કારણ કે છોકરાઓને એક વખત કારણ ધ્યાનમાં લઈને પછી વિધાન કરવાની ટેવ પડી ગઈ, એટલે પછી તેમને આધાર માટે સિદ્ધાંતનો ક્રમાંક કહેવાની છૂટ આપી હોય તોપણ ચાલે.

આ પુસ્તકમાં આધાર કહેતી વખતે સિદ્ધાંતના ક્રમાંકજ આપ્યા છે; પણ જગાનો બચાવ કરવા માટેજ એમ કર્યું છે. તેનું અનુકરણ, શરૂઆતમાં તો, વિદ્યાર્થીઓએ સર્વથા ન કરવું.

(૨) ચિહ્નોનો ઉપયોગ.—

અ ખુણા \square ખુણા બરાબર છે, અથવા જ્યોતી મોટો છે, એમ લખવાને બદલે $\angle a = \angle b$ અથવા $\angle a > \angle b$ એમ લખવું સહેલું અને તે વધારે વ્યવસ્થિત દેખાય છે; અને તે વાંચવું પણ વધારે સગવડભરેલું લાગે છે; માટે નવી ભૂમિતિમાં ચિહ્નોનો છૂટથી ઉપયોગ કર્યો છે. પરીક્ષામાં આ ચિહ્નોનો ઉપયોગ કરવા માટે પહેલાં પરીક્ષકોની સંમતિની જરૂર હતી, પણ હવે તેવી સંમતિની જરૂર નથી.

(૩) આધાર માટે પ્રત્યક્ષપ્રમાણ અને સ્વીકૃતકૃત્યોનો નામ દઈને ઉપયોગ કરવાની જરૂર નથી. પ્રત્યક્ષપ્રમાણ અને સ્વીકૃતકૃત્યનો આધાર જે બાબત માટે લેવાનો હોય છે તે ‘પ્રત્યક્ષ’ અને ‘સહેજ સમજાય એવી’ હોય છે, માટે એવી બાબતોને સ્વતંત્ર આધારની જરૂર નથી.



સૂચના—ભૂમિતિના વિષયની માહિતી પ્રયોગદ્વારા વિદ્યાર્થીઓને શી રીતે કરી આપવી તેનું દિગ્દર્શન કરાવવાના ખાસ હેતુથીજ આ પુસ્તકના ૧૬૫ અંકમાંની માહિતી આપી છે. તે શિક્ષકોએ ખાસ વાંચવી અને તેમાં કહ્યા પ્રમાણે વિદ્યાર્થીઓ પાસે કૃતિ કરાવવી.

નવી ભૂમિતિ.

ભાગ ૧લો.

ખંડ ૧લો.

(પ્રાયોગિક ભાગ.)

વિદ્યાર્થીઓને અવશ્ય જોઈતાં સાધનો.

માપ લેવાની પટ્ટી.—જેના પર ઇંચ અને ડેસિમીટર, તથા તે બંનેના અંશ અથવા ભાગ બતાવેલા હોય એવી પટ્ટી. [જે પટ્ટીના એકજ પૃષ્ઠની બંને કોરો ઢાળ પડતી હોઈ, એક કોર પર ઇંચ અને બીજી કોર પર મીટરના ભાગ બતાવ્યા હોય એવી પટ્ટી વધારે સારી.]

સેટ સ્કવેર કે ત્રિકોણમાપ.—(૧) જેના ખુણા ૯૦° , ૬૦° , અને ૩૦° ના હોય, અને જેનો કર્ણ (સૌથી લાંબી બાજુ) આસરે ૬ ઇંચ હોય, એવું ત્રિકોણમાપ. (૨) ૯૦° , ૪૫° , અને ૪૫° ના ખુણાવાળું ત્રિકોણમાપ. [આ ન હોય તોપણ ચાલે.]

વિભાજક (જેનાં બંને પાંખાં અણીવાળાં હોય છે તે) અને **કંપાસ** (જેના એક પાંખામાં પેન્સિલ ખોસાય છે તે.)—[જેમાં જરૂરિયાત પ્રમાણે પેન્સિલ કે પોલાદી અણીકે બેસાડી શકાય એવો કંપાસ હોય તો જુદા વિભાજકની જરૂર નહિ પડે.]

એચ પેન્સિલ.—૨ એચ કે ૩ એચની પેન્સિલ હોય તો વધારે સાફ. બની શકે તો ૩ એચની પેન્સિલનો ઉપયોગ કરવો.

[કંપાસની પેન્સિલની અને આકૃતિ કાઢવાની પેન્સિલની અણી પાલિશ પેપરથી (કાચ પાએલા કાગળથી) ઘસીને હંમેશાં ઝીણી રાખવી. આકૃતિ કાઢવાની પેન્સિલની અણી સોયના જેવી ઝીણી ન રાખતાં ફરસીના જેવી ચપટી રાખવી.]

કોણુમાપક.—(પ્રોટ્રેક્ટર)—અર્ધવર્તુળાકાર કોણુમાપક કરતાં ચતુષ્કોણ કોણુમાપક વધારે સારો ખરો; પણ શરૂઆતમાં અર્ધવર્તુળાકાર કોણુમાપકનો ઉપયોગ કરવો સહેલો પડે છે, માટે તેનોજ ઉપયોગ કરવો.

તે સિવાય ટ્રેસ કરવાનો કાગળ, ચોરસ આંકેલી એક્સસાઇઝ બુકો,* દોરો, ટાંકણી, વગેરે.

[પ્રયોગ ઉપરથી જે અનુમાન નીકળે છે તે વિદ્યાર્થીઓએ એક જુદીજ નોંધપોથીમાં નોંધી રાખવાં.]

લીટીઓ માપવા વિષ.

લીટીઓ માપવા માટે પટ્ટી અને વિભાજક વપરાય છે.

માપ લેવાની પટ્ટી (અથવા કુટપટ્ટી અને મીટરપટ્ટી)—આ પટ્ટી પર એક કોરે ઇંચ અને ઇંચના દશાંશ, તથા બીજી કોરે મીટરના x

*ભૂનિતિના બીજા ભાગમાં વાપરવા માટે.

***મીટર**—જુદા જુદા દેશમાંનાં વજન તથા માપ જુદાં જુદાં હોવાથી વેપારને તેમજ બીજા વ્યવહારને ભારે હરકત નેડે છે. લોકોને આજ ઘણાં વર્ષ થયાં તે દૂર કરવાની ઇચ્છા થઈ છે; પરંતુ આ કામ માટે ફ્રેન્ચ સિવાય બીજા કોઈ લોકો આગળ આવ્યા નથી. તેમણે આજથી આસરે ૭૫ વર્ષ પહેલાં જુનાં વજન અને માપ બંધ કરીને તેમની જગાએ નિયમિત પ્રમાણમાં (દશકથી) વધતાં અને ઘટતાં નવાં માપ ચોજ્યાં. માપ માટે પ્રથમ પરિમાણ જે લેવું તે ગમે તે એક સંકેત નક્કી કરીને નહિ, પણ કોઈ અમુક નિશ્ચિત અને સર્વસામાન્ય પરિમાણને આધારે લેવું, એમ વિચારીને તેમણે પૃથ્વીના એક અમુક ચામ્યોત્તરવૃત્ત ઉપરથી લંબાઈવું.

ભાગ જણાવેલા હોય છે. એક મીટર એટલે આસરે ૩૯.૩૭ ઇંચ થાય છે. મીટરના ડેસિમીટર, સેન્ટિમીટર, મિલિમીટર એવા ભાગ છે. પટ્ટી પર દર્શાવેલા મીટરના ભાગ પૈકી સૌથી નાનો ભાગ (પાસ પાસેની બે લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર) મિલિમીટર છે.

મીટરનું કોષ્ટક.

(મિલિમીટર = $\frac{1}{1000}$ મીટર).

૧૦ મિલિમીટર = ૧ સેન્ટિમીટર (= $\frac{1}{10}$ મીટર)

૧૦ સેન્ટિમીટર = ૧ ડેસિમીટર (= $\frac{1}{10}$ મીટર)

૧૦ ડેસિમીટર = ૧ મીટર

૧૦ મીટર = ૧ ડીકામીટર (= ૧૦ મીટર)

૧૦ ડીકામીટર = ૧ હેક્ટોમીટર (= ૧૦૦ મીટર)

૧૦ હેક્ટોમીટર = ૧ કિલોમીટર (= ૧૦૦૦ મીટર)

આ ભૂમિતિમાં ઉપલાં છેલ્લાં ત્રણ માપનો ખીલકુલ ઉપયોગ નથી, તેથી વિદ્યાર્થીએ તે ધ્યાનમાં રાખવાની જરૂર નથી.

પટ્ટી ઉપરના ઇંચ અને તેના દશાંશ, અને તેવીજ રીતે મીટરના ભાગ છોકરાઓ બરાબર સમજ્યા છે એવી પોતાની ખાતરી કરી લઈ પછી છોકરાઓ પાસે લીટીઓ મપાવવી.

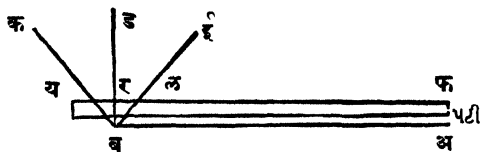
લંબાઈ કે અંતર માપવાની ચોકસ રીત.—કોઈ અમુક લીટીની લંબાઈ કે બે બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર ચોકસાઈથી માપવા

મૂળ પરિમાણ નક્કી કર્યું છે, અને તેને મીટર એ નામ આપ્યું છે. મીટર એ પારિસમાં થઈ જતા ચામ્પાત્તરવૃત્તનો $\frac{1}{10000000}$ ભાગ છે. આ મીટર ઉપરથીજ તેમણે બધાં વજન અને માપ નક્કી કર્યા છે. દાખલા તરીકે આર અથવા ૧૦૦ ચારસ મીટર એ ક્ષેત્રફળનું મૂળ પરિમાણ છે. એક ઘન સેન્ટિમીટર પાણીનું (૩૯.૨ ફેરેનહાઈટ ઉષ્ણતામાને) વજન, કે આમ તે વજનનું મૂળ પરિમાણ છે; અને લિટર અથવા એક ઘન ડેસિમીટર એ અનાજ વગેરેના ભરતલન માપનું મૂળ પરિમાણ છે.

માટે વિભાજકનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. આ રીત નીચે પ્રમાણે છે:—જે અંતર માપવું હોય, તે કરતાં જરા વધારે અંતર વિભાજકની અણીઓ વચ્ચે રહે એમ વિભાજક ઉઘાડવો; પછી હળવે રહી દબાવીને અણીઓની વચ્ચેનું અંતર ઓછું કરતાં કરતાં એ અણી આપેલી લીટીના એ છેડા પર બરાબર આવે એમ કરવું. પછી વિભાજકની અણીઓ પટ્ટી પર મૂકી પટ્ટી પરનું અંતર ગણવું. (વિભાજકનાં પાંખાં પટ્ટી પર ઉભાં ન રાખતાં ત્રાંસાં કે આડાં રાખવાં; એમ કરવાથી વિભાજકની અણી પટ્ટીને વાગવાથી પટ્ટીને કાણાં પડવાની ખીક રહેશે નહિ.)

ખાસ ચોક્કસાઈની જરૂર ન હોય ત્યારે લીટી માપવા માટે ફક્ત પટ્ટીનો ઉપયોગ કરવો. પટ્ટીથી લીટી માપવી હોય, તો તે કામ માટે લંબાઈની બંને બાજુએ ઢાળ પડતી હોય એવી પટ્ટી સારી પડશે.

પટ્ટી બંને બાજુએ ઢાળ પડતી ન હોય, તો પટ્ટી લીટી પર મૂક્યા પછી, લીટીનો છેડો પટ્ટી પરની કઈ નિશાનીની નીચે આવે છે તે જોવા માટે લીટીના છેડાની ઉપલી બાજુએ લંબમાં આંખ મૂકીને જોવું. લંબમાં ન જોતાં ત્રાંકું જોયું હોય તો લીટીનો છેડો ખરેખર જે કાપા નીચે હોય છે તેનાથી કોઈ જુદાજ કાપા નીચે દેખાય છે. એમ કેમ બને છે તે નીચેની આકૃતિ ઉપરથી જણાઈ આવશે.



(પટ્ટીની ઉપલી આકૃતિમાં ઉભી લીટી પટ્ટીની જડાઈ દર્શાવે છે, એ ધ્યાનમાં રાખવું.)

ધારો કે અવ લીટીની લંબાઈ માપવી છે. જોનારની આંખ. વડ લંબના ડ બિંદુ પાસે હશે, તો વ છેડો ર બિંદુની નીચે દેખાશે, અને અવ લીટીની લંબાઈ ફર જેટલી લાગશે. જો આંખ ઈ સ્થાનમાં હશે, તો અવ લીટીની લંબાઈ ફલ જેટલી લાગશે; આંખ ક સ્થાને હશે, તો અવની લંબાઈ ફચ જેટલી લાગશે.

પ્રશ્નો.

૧. અવ લીટીની લંબાઈ ઇંચ અને મિલિમીટરમાં માપો.*

અ—————વ

૨. આ પુસ્તકની લંબાઈ અને પહોળાઈ ઇંચ અને મિલિ- મીટરમાં માપો.

૩. ઉપલા પ્રશ્નોના જવાબ ઉપરથી એક ઇંચમાં કેટલાં મિલિમીટર આવે છે તે શોધી કાઢો. વિભાજકની અણીઓનું અંતર ૩.૯ ઇંચ રાખો, અને તે અણીઓ પટ્ટી પર મિલિમીટરોની બાજુએ મૂકીને તેમાં કેટલાં સેન્ટિમીટર અને મિલિમીટર આવે છે તે શોધી કાઢો.

૪. માપવાની પટ્ટીની મદદથી નીચેની બે લીટી પૈકી દરેકની લંબાઈ મીટર અને ઇંચના દશાંશમાં કહો.

૫. અક, કવની લંબાઈ ઇંચમાં માપો અને તેમનો સરવાળો કરો. પછી અવની લંબાઈ માપીને પહેલો જવાબ બરાબર છે કે કેમ તે જુઓ.

અ—————ક—————વ

૬. અક, કડ, ડવની લંબાઈ ઇંચમાં માપો અને તેમનો સરવાળો કરો. પછી અવની લંબાઈ માપીને પહેલાંનો જવાબ બરાબર છે કે નહિ તે જુઓ.

*લંબાઈ કે અંતર ઇંચ અને ઇંચના દશાંશ તથા મિલિમીટરમાં આપજી વામાં આવે છે.

મિલિમીટરમાં પણ લંબાઈ માપીને ઉપલા $\frac{1}{2}$ — $\frac{1}{4}$ — $\frac{1}{8}$ — $\frac{1}{16}$ અને પ્રશ્નના જવાબ કાઢો.

૭. અઘ લીટીની લંબાઈ માપો. અઘની લંબાઈ માપીને તે અઘમાંથી બાદ કરો, એટલે કઘની લંબાઈ નીકળશે. કઘની લંબાઈ પ્રત્યક્ષ માપીને પહેલાંનો જવાબ બરાબર છે કે કેમ તે જુઓ.

$\frac{1}{2}$ — $\frac{1}{4}$ — $\frac{1}{8}$ — $\frac{1}{16}$

૮. ૨.૭ ઇંચ લાંબી લીટી લો, અને તેમાં ગમે ત્યાં એક બિંદુ લઈને તેનાં બંને છેડેથી અંતરો માપો. તેમનો સરવાળો કરો, અને તે ૨.૭ થાય છે કે નહિ તે જુઓ. થતો ન હોય તો ભૂલ ક્યાં થઈ તે જુઓ.

૯. અઘ લીટી ૪.૫" * લો. તેમાં અઘ=૧.૨", કઘ=૨.૬" લઈને કઘની લંબાઈ માપો. તે ખરી લંબાઈની સાથે મળતી આવે છે કે કેમ તે જુઓ. મળતી આવતી ન હોય તો ભૂલ ક્યાં થઈ તે જુઓ.

૧૦. એક ૬.૬"ની લીટી લો. તેના ૧ : પના પ્રમાણમાં હોય એવા બે ભાગ કરો.

(નીચેના ૧૧-૧૬ પ્રશ્નો પહેલે ફેરે મૂકી દીધા હોય તો પણ ચાલે.)

૧૧. એક લીટી લઈને તેની લંબાઈની અટકળ કરો, અને તે પ્રત્યક્ષ માપીને તમારી અટકળ કેટલે દરજ્જે ખરી છે તે જુઓ. (પુ) ×

૧૨. ૩.૬" લીટી લઈને તેના અર્ધા ભાગની લંબાઈ ગણિતથી નક્કી કરીને તેટલો ભાગ કાપો. બાકી રહેલા ભાગની લંબાઈ માપીને તે થવી જોઈએ તેટલી છે કે કેમ તે જુઓ.

* " આ ચિહ્નનો અર્થ ઇંચ થાય છે. દાખલા તરીકે ૧.૨" એટલે ૧.૨ ઇંચ.

× પુ = પુનરાવર્તન; એટલે એજ બાબતનું પુનરાવર્તન કરો. કોઈ પણ બાબત બરાબર આવડે ત્યાંસુધી તેનું પુનરાવર્તન કરવું પડે છે.

૧૩. ૩૩ મિ. મી.+ લીટી લઈને તેના ત્રીજો ભાગ ગણિતથી નક્કી કરીને તેટલા મોટા બે ભાગ તે લીટીમાંથી કાપી કાઢો. રહેલા ત્રીજા ભાગની લંબાઈ માપીને તે બરાબર છે કે કેમ તે જુઓ.

૧૪. અબના અટકળથી સરખા બે ભાગ કરો, અને તે બરાબર છે કે નહિ તે પ્રત્યક્ષ માપી જુઓ. (૫૦)

૧૫. અબના અટકળથી ત્રણ સરખા ભાગ કરો, અને તે પ્રત્યક્ષ માપીને બરાબર છે કે કેમ તે જુઓ.

૧૬. અબના અટકળથી ચાર સરખા ભાગ કરો, અને તે પ્રત્યક્ષ માપીને બરાબર છે કે કેમ તે જુઓ.

(જવાબ સાધારણ રીતે બરાબર આવે ત્યાંસુધી વિદ્યાર્થીએ ઉપર પ્રમાણે લીટીઓની લંબાઈ અટકળથી માપવાનો મહાવરો કરવો.)

લીટીઓ દુભાગવા વિષે.

આપેલી લીટીના બે સરખા ભાગ કરવાની સ્થૂળ રીત:—

વિભાજકની અણીઓ આપેલી લીટીની અર્ધી લંબાઈ જેટલે અંતરે આસરે રાખવી. લીટીને વિભાજક લગાડીને આપેલી લીટીના બે સરખા ભાગ પડે છે કે કેમ તે જોવું. પડતા હોય તો ઠીકજ છે; પરંતુ પડતા ન હોય તો જે તદ્દાવત પડે તેના અર્ધી ભાગ વિભાજકની અણીઓની વચ્ચેના અંતરમાં જરૂર જણાય તેમ વત્તો કે ઓછો કરવો.

દાખલા તરીકે:—અબ લીટીના બે સરખા ભાગ કરવા છે. તેના આસરે અર્ધી ભાગ જેટલે અંતરે વિભાજકની બે અણીઓ રહે એટલો વિભાજક પહોળો કરો, અને તે અબ લીટી પર મૂકો. ધારો કે તે બે અણીઓ અ અને ગ પર પડે છે. એમજ બીજા વાર ભાજકને ગ બિંદુથી શરૂ કરીને મૂકો એટલે બીજા અણી ક પર પડશે.

આ બે ભાગ મળીને આપેલી લીટીથી ઝોછા થાય છે, માટે બાકી રહેલા (કચ અક્ષરથી દેખા-

ડેલા) અંતરના અર્ધ જેટલી અ ————— ગ હ ક ડ બ
(કડ જેટલી) વિભાજકની

અણીઓ વધારે પહોળી કરવી. એટલે પહેલાં વિભાજકની અણીઓની વચ્ચે કચ જેટલું અંતર હતું તે અંતર હવે ગડ જેટલું થશે. હવે વિભાજક લીટી પર મૂકશો તો તેની બે અણીઓ પહેલી વખત અ ને હ પર, ને બીજી વખત હ ને બ પર પડી રહેશે. એટલે અબ લીટી હ મિંદુમાં દુભગાઈ.

એજ રીતે આપેલી કોઈ પણ લીટીના, જે સંખ્યા બેનો ધાત હોય તે સંખ્યા જેટલા સરખા ભાગ કરી શકાશે.

પ્રશ્નો.

૧. ૩.૨", ૪.૩", ૨.૯", ૩.૭" લંબાઈની લીટી દોરો, અને તેમના બે સરખા ભાગ કરો.

૨. ઉપલા પ્રશ્નમાંની લીટીઓના ૪ સરખા ભાગ કરો.

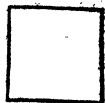
કાગળ વાળીને લીટી દુભાગવાની રીત.—અબ લીટી કાગળ પર દોરો. હવે એ કાગળને એવી રીતે વાળો કે આખી અબ લીટી સળ ઉપર બહારની બાજુએ બરાબર આવી રહે. હવે અ છેડેા બ ઉપર આવે એવી રીતે કાગળ ફરીથી વાળો. બીજી વખત વાળતાં જ્યાં સળ પડશે ત્યાં લીટીના સરખા બે ભાગ થશે.

કાગળ ઉપર ૨", ૨.૫", ૩", ૩.૭", ૩.૩", ૪.૫" ... લંબાઈની લીટીઓ લઈને તે ઉપલી રીતે દુભાગો, અને તે બરાબર દુભગાઈ છે કે કેમ તે વિભાજકની મદદથી તપાસી જુઓ.

રેકેલ કે અંતરપ્રમાણ.

વર્ગમાંના કાળા પાટીઆની લંબાઈ માપો. તે કેટલા ફુટ છે?

“ચાર ફુટ.” એજ પાટીઆની આકૃતિ આ પાના પર દોરી છે તે જુઓ. આ આકૃતિમાંની પાટી-આની લંબાઈ માપો. તે કેટલા ઇંચ છે? “આ લંબાઈ અર્ધો ઇંચ છે.” આ ઉપરથી પાટીઆની



લંબાઈ અર્ધો ઇંચ છે એમ સમજવાનું કે? આ આકૃતિમાંની અર્ધો ઇંચ લંબાઈ પરથી ખરી લંબાઈ કેટલી સમજવાની? “ચાર ફુટ.”

આ આકૃતિમાંની પાટીઆની પહોળાઈ માપો. તે કેટલી છે? “અર્ધો ઇંચ.” આ ઉપરથી પાટીઆની ખરી પહોળાઈ કેટલી છે, તે તમારા જાણવામાં આવે છે? “ચાર ફુટ.” આ કેમ સમજાયું? “પેલી આકૃતિમાંની અર્ધો ઇંચ લંબાઈ જો ૪ ફુટ દર્શાવે છે, તો અર્ધો ઇંચ પહોળાઈ પણ ૪ ફુટ દર્શાવે છે.”

પાસે ટેકરીનું ચિત્ર દોરેલું છે. આ ટેકરીની ઉંચાઈ કેટલી છે, તે ચિત્ર ઉપરથી તમે કહી શકશો કે? તે કહેવાને વળી કઈ બાબત આપેલી હોવી જોઈએ? “ચિત્ર અને ટેકરી એ બેની ઉંચાઈનું પ્રમાણ.”



આકૃતિમાં બતાવેલું અંતર (લંબાઈ પહોળાઈ વગેરે) અને ખરું અંતર એ બેની વચ્ચેના પ્રમાણને અંતરપ્રમાણ (અંગ્રેજીમાં સ્કેલ) કહે છે. આ પ્રમાણ આપેલું ન હોય તો આકૃતિ જોનારને, તે આકૃતિ જે વસ્તુની છે તે વસ્તુનું ખરું પરિમાણ શું છે તે જણાશે કે? “ના” ઠીક. જો પ્રમાણની જરૂર ન રાખતાં વસ્તુઓ હોય તેટલી મોટી દોરવા જઈએ તો શી અગવડ પડે? “.....”

વસ્તુ જેટલા કદની હોય તેટલાજ કદની આકૃતિ કાગળ પર સાધારણ રીતે દોરી શકાતી નથી. દાખલા તરીકે, ઘણાજ નાના પદાર્થો જેટલા કદના દેખાય છે, તેટલીજ નાની તેમની આકૃતિ હાથે કાઢી શકાતી નથી; અને યંત્રોની મદદથી (ફોટો વગેરે લઈને) તે કાઢી શકાતી હોય, તોપણ તે નરી આંખો વડે જોનારને સ્પષ્ટ દેખાતી

નથી; માટે તે અસલ પદાર્થ કરતાં મોટી દોરવી પડે છે. એથી ઉલટું, જે પદાર્થો મોટા હોય છે, તેમની આકૃતિ તેમના જોટલી મોટી દોરવા માટે ઘણાજ મોટા કાગળ લેવો પડશે; માટે તેમની આકૃતિ તેમનાથી નાની દોરવી પડે છે. આ કારણને લીધે વસ્તુની આકૃતિ દોર્યા પછી તે વસ્તુનું ખરેખર કદ કેટલું છે એ સમજવા માટે તે આકૃતિની લંબાઈ અને તે વસ્તુની ખરી લંબાઈ એ બેનું પ્રમાણ આપવું પડે છે. નકશાની નીચે સ્કેલ આપે છે તે એટલાજ માટે.

અંતરપ્રમાણદર્શક અપૂર્ણાંક—આકૃતિની લંબાઈ અંશની જગાએ, અને વસ્તુની ખરી લંબાઈ છેદની જગાએ લખવાથી જે અપૂર્ણાંક આવે છે, તેને અંતરપ્રમાણદર્શક અપૂર્ણાંક કહે છે. દાખલા તરીકે, આકૃતિમાં એક ઇંચ એક માઇલ દેખાડતો હોય ત્યારે $\frac{1}{૫૨૮૦ \times ૧૨} = \frac{1}{૬૩૩૬૦}$ આ અપૂર્ણાંકને અંતરપ્રમાણદર્શક અપૂર્ણાંક કહે છે; ૨ ઇંચ એક માઇલ દર્શાવતા હોય ત્યારે $\frac{2}{૫૨૮૦ \times ૧૨} = \frac{1}{૩૧૬૮૦}$ આ અપૂર્ણાંકને અંતરપ્રમાણદર્શક અપૂર્ણાંક કહે છે; ૩ ઇંચ એક માઇલ દર્શાવતા હોય ત્યારે $\frac{3}{૫૨૮૦ \times ૧૨}$ આ અંતરપ્રમાણદર્શક અપૂર્ણાંક થાય;...વગેરે.

પ્રશ્નો.

૧. હિંદુસ્તાનના નકશા ઉપરથી નીચેનાં સ્થળોની વચ્ચેનું અંતર કાઢો:—કાશી અને કલકત્તા, કરાંચી અને કલકત્તા, મુંબઈ અને મદ્રાસ, વગેરે.

૨. પાસે જે ઝાડોનાં ચિત્ર આપેલાં છે, તે જે પ્રમાણ ઉપર દોરેલાં છે, તે પ્રમાણ ૧" : ૫' એટલે એક ઇંચ પાંચ ફુટ માટે* છે, તો તેની ઉંચાઈ કેટલી તે કહો.



* આ નિશાની ફુટ માટે છે. દાખલા તરીકે ૫' = ૫ ફુટ.

૩. પાસે દેખાડેલા ફુંગરની ઉંચાઈ કાઢો. સ્કેલ
 $1''=1000'$.



૪. એક માઇલ માટે એક ઇંચ પ્રમાણુ લઈને જેમની વચ્ચે
 ૨ ફૂટ માઇલ અંતર છે એવાં બિંદુ કાઢો.

૫. $1''=2$ માઇલ, એ સ્કેલ લઈને ૪ માઇલ લાંબો સીધો
 રસ્તો કાઢો.

૬. $1''=1$ માઇલ, આ સ્કેલ લઈને જેમની વચ્ચેનું અંતર
 ૨.૫ માઇલ હોય એવાં બે ગામની જગાઓ ટપકાંથી દર્શાવો.

૭. $1''=1$ યાર્ડ, એ સ્કેલ લઈને ૪૫'' ઉંચી લાકડી ઉભી
 લીટીથી દર્શાવો.

સૂચના—નીચેના પ્રશ્નો છોડવા માટે કાટખુણો કાઢવાની રીતની
 જરૂર પડે છે. તે પાછલાં પાનાં જોઈને કહેવી, અથવા તે ભાગ
 ચલાવ્યા પછી નીચેના પ્રશ્ન છોડાવવા.

૮. ૫૦૦' લાંબા અને ૧૦૦' પહોળા ખેતરની આકૃતિ દોરો.
 (અંતરપ્રમાણ ૧ સે. મી. $\times = 100'$).

૯. ૩૨૨' લાંબા અને ૧૮૨' પહોળા ખેતરની આકૃતિ દોરો.
 (અંતરપ્રમાણ ૧ સે. મી. $= 18'$.)

૧૦. જેની લંબાઈ અને પહોળાઈ અનુક્રમે ૪૦૦' અને ૩૦૦'
 છે, અને જેની આસપાસની ભીંતની પહોળાઈ ૧૦' છે, એવા
 તળાવની આકૃતિ દોરો. (અંતરપ્રમાણ $1''=100'$.)

૧૧. ચક્ર સીઠી અડધી ભીંતે ટેકવીને ઉભી કરેલી છે. અ ભીંતનો
 પાયો છે. હવે અઘ=૬' અને અક=૮' હોય તો સીઠીની
 લંબાઈ કેટલી ?+

\times સે. મી. = સેન્ટિમીટર.

+ આ અને હવે પછીના આના જેવા પ્રશ્નોમાં પ્રત્યક્ષ લીટી માપીને
 સ્કેલની મદદથી જવાબ કહેવાનો હોય છે. અંતરપ્રમાણ સગવડ પ્રમાણે
 બમે તે લેવું.

૧૨. ઉપલા પ્રશ્નમાં અબ અંતર ૯' અને અક ૪૦' હોય તો સીદીની લંબાઈ કેટલી ?

૧૩. જેની લંબાઈ ૩૦ ફુટ છે અને પહોળાઈ ૨૨ ફુટ છે, એવી એરડીના ભોંયતળીઆની આકૃતિ કાઢો અને તેના સામસામા બે ખુણાની વચ્ચેનું અંતર માપો.

[સૂચના—પૂર્વ અને દક્ષિણ, દક્ષિણ અને પશ્ચિમ, પશ્ચિમ અને ઉત્તર, અને ઉત્તર તથા પૂર્વ, આ પાસપાસેની બધી દિશાની વચ્ચે કાટખુણો હોય છે, એ વિધાર્થીઓને કહીને પછી નીચેના પ્રશ્નો છોડવા કહેવું.]

૧૪. એક માણસ યરાયર પૂર્વમાં ૮૨ માઇલ ગયો, અને ત્યાંથી યરાયર ઉત્તર તરફ ૫૩ માઇલ ગયો; તો તે જ્યાંથી નીકળ્યો ત્યાંથી કેટલા માઇલ સીધો આધો ગયો તે કહો.

૧૫. એક માણસ અ આગળથી નીકળીને યરાયર પૂર્વ તરફ ૩ માઇલ જાય છે, પછી યરાયર ઉત્તર તરફ ૪ માઇલ જાય છે, અને ત્યાંથી યરાયર પૂર્વમાં ૩ માઇલ જઈને બ સ્થળે પહોંચે છે; તો અબ વચ્ચે અંતર કેટલું ?

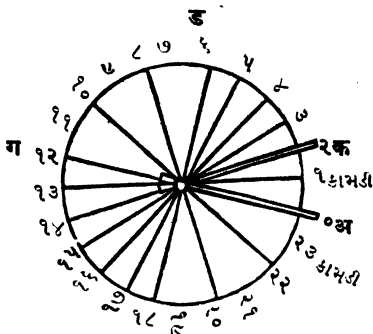
૧૬. બ,અની પૂર્વમાં ૯ માઇલ છે. ક, બની ઉત્તરમાં ૧૨ માઇલ છે. ડ, કની પશ્ચિમમાં ૧૫ માઇલ છે; તો અથી બ કેટલો આધો છે ?

૧૭ અની પૂર્વમાં બ ૩ માઇલ છે. બની દક્ષિણમાં ક ૨ માઇલ છે. કની ઈશાનમાં ડ ૩ માઇલ છે. ડની વાયવ્યમાં ઈ ૪ માઇલ છે; તો અથી ઈ કેટલા માઇલ આધો છે ?

૧૮. અથી બ પૂર્વમાં છે, અને તે બે વચ્ચે ૪૦૦ ફુટનું અંતર છે. ક સ્થળ અની યરાયર ઈશાનમાં અને બની યરાયર વાયવ્યમાં છે; તો કનું અથી અંતર કેટલું ?

ખુણો.

પાસે દોરેલી આકૃતિ જેવી આકૃતિ પાટીઆ પર અથવા મોટા કાગળ પર દોરો, અને તે કાગળ ટાંકણીઓથી પાટીઆ પર ચોઢો. વાંસની જે સાંકડી કામડીઓ લઈને તેમના એક છેડામાં કાણું પાડો, અને કાણુંમાં તાર કે ટાંકણી ધાલીને તેના છેડા વાળો, અને મળગરા જેવું બનાવો. પછી આ જે કામડીઓથી બનેલો કંપાસ લઈને તેની નીચેની કામડી આકૃતિમાં દેખાડ્યા પ્રમાણે પાટીઆ પર આડી સજ્જડ એસાડો. પછી ઉપલી કામડીનો જમણા હાથ



તરફનો એટલે છુટો છેડો ધડિઆળના કાંટાથી ઉલટી દિશામાં જરા ખસેડો, એટલે મળગરા પાસે (જ્યાં પેલી કામડીના છેડા તારથી જોડી દીધા છે ત્યાં) ખુણો થશે. તે છોકરાઓને દેખાડો, અને “આ જે કામડીઓ એક બીજને મળે છે ત્યાં આગળ જે ખુણો બન્યો છે તેને કોણ કે ખુણો કહે છે,” એમ કહો. કોણ એટલે ખુણો. બધા ખુણા બે લીટી* કે બે બાજુઓ મળવાથી જ બને છે. (પાસેના પદાર્થો બતાવીને તેમના ખુણા બતાવવા છોકરાઓને કહો. દાખલા તરીકે, મેજના ખુણા, બીંતો એક બીજને જ્યાં મળે છે તે ખુણા.....વગેરે.) ઉપર કહેલી કામડીઓના છુટા છેડા વચ્ચેનું અંતર વધારો (ઉપલી કામડીનો છુટો છેડો ગોળ કુંડાળામાં ફેરવો), અને પહેલાંનાથી બમણો ખુણો બનાવો. પહેલાં

* આ પુસ્તકમાં લીટી એ શબ્દનો અર્થ ધણેખરે દેકાણે સીધી લીટી એવો કરવાનો છે.

કરતાં હવે ખુણા મોટા થયો છે કે? પહેલાં કામડીનો છેડો વર્તુળના કેટલામા ભાગમાં થઈને ફર્યો હતો? હવે કેટલામા ભાગમાં થઈને ફર્યો છે? પહેલાંના ખુણા કરતાં આ ખુણા કેટલાગણો મોટો છે? “અમણો.” કામડીનો છેડો જરા જરા આગળ ખસેડીને ખુણા મોટો બનાવતા જાઓ, અને આ ખુણા કાટખુણા કરતાં ઓછો હોય તેજ વખતે તેનો ન્યૂનતાપૂરક ખુણા^x તે ખુણા કરતાં નાનો છે કે મોટો છે એમ પૂછો. “મોટો છે” એમ છોકરા કહેશે. પછી કામડીથી બનેલો ખુણો વધારો, અને આ ખુણો જેમ જેમ વધતો જાય છે તેમ તેમ ન્યૂનતાપૂરક ખુણામાં શો ફેરફાર થતો જાય છે તે પૂછો. તે ખુણો નાનો નાનો થતો જાય છે એમ છોકરા કહેશે. પહેલો ખુણો કાટખુણા બરાબર થયો, એટલે તે ખુણો અને ન્યૂનતાપૂરક ખુણો એ પકી મોટો ક્યો એમ પૂછો. બંને સરખા છે એમ કહે, તો “એટલા મોટા ખુણાને કાટખુણો કહે છે” એમ કહો. કાટખુણાના બીજા દાખલા છોકરાઓને બતાવો, અને પછી તેવા બીજા દાખલા તેમની પાસે કઢાવો. કામડીનો છેડો આગળ ખસેડો, અને થયેલો ખુણો કાટખુણાથી મોટો છે, અને તેનો ન્યૂનતાપૂરક ખુણો કાટખુણા કરતાં નાનો છે, એ કઢાવો. એ પ્રમાણે છેડો આગળ ખસેડતાં ખસેડતાં, પહેલો ખુણો અને ન્યૂનતાપૂરક ખુણો એ બે વચ્ચે પડતો તફાવત છોકરા પાસેથીજ કઢાવો. કામડીનો છેડો ગ અક્ષર પાસે જાય એટલે થએલો ખુણો કાટખુણાથી કેટલો મોટો છે એમ પૂછો. કામડીનો છેડો જ રથળે આવતા સુધીમાં બે એક કાટખુણો થાય છે, તો છેડો તેટલોજ આગળ ગયાથી કેટલા કાટખુણા જેવડો ખુણો થશે?

એક કાટખુણો કરવા માટે વર્તુળના કેટલામા ભાગમાં થઈને બીજી કામડીનાં છેડાને ફરવું પડે છે? કેટલામા ભાગમાં થઈને ફરવાથી

^x ન્યૂનતાપૂરક ખુણો એ શબ્દનો ઉપયોગ આ વખતે છોકરાઓ સાથે બોલવામાં કરવો નહિ. પણ તે ખુણો હાથે દેખાડવો. ઉપલો શબ્દ કેવળ શિક્ષકો માટે ચાલેલો છે.

અર્ધો કાટખુણો થશે ? કેટલામા ભાગમાં થઈને ફરવાથી દોઢ કાટખુણો થશે ? કેટલામા ભાગમાં થઈને ફરવાથી બે કાટખુણા થશે ? ...વગેરે.

સૂચના—હવે પછીનો ભાગ શીખવતા પહેલાં વર્તુળ, વર્તુળનું મધ્યખિંદુ, પરિઘ, ત્રિજ્યા, ક્રૌંસ, જ્યા, વગેરે સંજ્ઞાઓની માહિતી છોકરાઓને આપવી. આ પારિભાષિક શબ્દોની વ્યાખ્યાઓ આગળથી મોઢે કરાવી લેવાની જરૂર નથી. છોકરાઓ તેમનો અર્થ સમજે, અને તે તે આકૃતિઓને તેમનાં ખરાં નામ વડે બતાવી શકે, એટલે બસ છે.

વ્યાખ્યા.

જે આકૃતિની હદ એકજ અખંડ વક્ર લીટીથી દર્શાવાય છે, અને જેમાં એક એવું ખિંદુ હોય છે કે તેમાંથી તે વક્ર લીટી સુધી ગમે તેટલી સીધી લીટીઓ દોરી હોય તોપણ તે બધી સરખી થાય છે, તે આકૃતિને **વર્તુળ** કહે છે.

વર્તુળની હદ દેખાડનાર વક્ર લીટીને તેનો **પરિઘ** કહે છે.

પરિઘના કોઈ પણ ભાગને **ક્રૌંસ** કહે છે.

વર્તુળના જે ખિંદુમાંથી પરિઘ સુધી દોરેલી સીધી લીટીઓ બધી સરખી હોય છે તેને વર્તુળનું **મધ્યખિંદુ** કહે છે.

મધ્યખિંદુથી પરિઘ સુધી દોરેલી કોઈ પણ સીધી લીટીને **ત્રિજ્યા** કહે છે.

ખુણાઓનું નાનામોટાપણું.

ઉપલા પ્રયોગમાંની કામડીથી અર્ધો કાટખુણો કરો. પછી બંને કામડીઓને છેડે બીજી કામડીઓ બાંધીને ખુણાની બાજુઓ લાંબી કરો. આ ખુણો પહેલાંના ખુણા કરતાં મોટો છે કે ? પહેલાંનો ખુણો કેવડો છે ? વર્તુળના કેટલામા ભાગમાં થઈને ફર્યો છે ? “એક અષ્ટમાંશ.” આ ઉપરથી આ ખુણો પહેલાંના ખુણા જેવડોજ છે એમ સમજાય છે.

આ ખુણા મોટા કરવો હોય તો શું કરવું જોઈએ ? “છેડો આગળ ખસેડવો, જોઈએ.” ખુણાની બાજુ વધારે લાંબી કરવાથી ખુણા મોટા થશે કે ? “ના.”

આ (પાસેની આકૃતિમાં બતાવેલી) કામડીઓ અર્ધો કાટખુણો કરે છે. તેમનો જમણી બાજુનો અર્ધો ભાગ કાપી નાખ્યો હોય, તો ખુણામાં કંઈ તફાવત પડશે કે ? “ના.” આ ખુણા નાનો કરવો હોય તો શું કરવું જોઈએ ? ખુણા નાનો કરી જુઓ અને પછી સવાલનો જવાબ આપો. “ફરતી કામડીનો છેડો પાછળ ખસેડવો જોઈએ.”

પરિમાણમાં સરખા છતાં પણ જેમની બાજુઓ નાની મોટી છે એવા બે ખુણા પાટીઆ પર દોરો, અને તે પૈકી કયો ખુણો મોટો છે તે છોકરાઓને પૂછો; એટલે લાંબી બાજુઓવાળો ખુણો મોટો છે એમ છોકરા કહેશે. પછી ખુણાની એક બાજુ પર વિભાજકની એક બાજુ (તેમનાં શિરોબિંદુઓ એક બીજા પર આવે એવી રીતે) મૂકીને તે ખુણા જેટલો ખુણો થતા સુધી વિભાજકની બીજી બાજુ ખસેડો. પછી આ વિભાજક બીજા ખુણા પર તેવીજ રીતે મૂકીને બંને ખુણા સરખા છે એમ બતાવો, અથવા આ વિભાજક, ઉપર કહેલા (૨૧મા પાના પરના) ચક્ર ઉપર મૂકીને તેથી વર્તુળનો કેટલામો ભાગ દર્શાવ્ય છે તે જોવાને છોકરાઓને કહો. પછી વિભાજક બીજા ખુણા પર મૂકીને પહેલાંની માફકજ કૃતિ કરો. બે ખુણામાં કંઈ તફાવત છે કે ? “ના.”

એકથી બીજો જરા મોટો હોય એવા બે ખુણા લો. તે પૈકી નાના ખુણાની બાજુઓ મોટા ખુણાની બાજુઓ કરતાં લાંબી લો. આ બેમાં મોટો ખુણો કયો ? જેની બાજુ લાંબી છે તે ખુણો મોટો એમ કદાચ છોકરા કહે, તો પછી ઉપર પ્રમાણે કૃતિ કરીને ખરેખરો મોટો ખુણો કયો તે છોકરાઓની પાસે કઢાવો.

આ ઉપરથી ખુણાઓનું નાનામોટાપણું શા પર આધાર રાખે છે, તે સમજાય છે ? તે બાજુઓની લંબાઈ પર આધાર રાખે છે કે ? “ ના.”

અલબત્ત ખુણો બનાવવા માટે ચક્રનો જ છેડો વર્તુળના ૩ ભાગમાં થઈ જતા સુધી ફેરવવો પડ્યો, તો તેવડોજ બીજો ચક્ર ખુણો કરવા માટે ફક્તનો ફ છેડો વર્તુળના કેટલામા ભાગમાં થઈને જતા સુધી ફેરવવો પડશે ? આ ઉપરથી બે ખુણા સરખા છે એમ ક્યારે કહેવાય, એ વિષે કોઈ નિયમ કહી શકાય છે કે ?

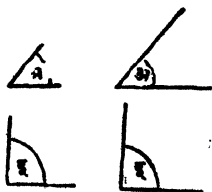
“ જ્યારે બે ખુણાની બાજુઓ વર્તુળના સરખા ભાગમાં થઈને ફરેલી હોય છે, ત્યારે તે ખુણા સરખા છે એમ કહેવાય છે.”

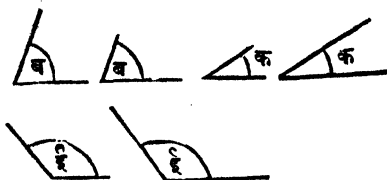
ખુણાઓનું સરખાપણું અથવા નાનામોટાપણું નક્કી કરવાની રીત:—

એક ખુણો ઉપાડીને બીજા પર મૂક્યો હોય, ત્યારે જો તે બીજા પર બરાબર આવી રહે, એટલે જો તે બંનેનાં શિરોબિંદુઓ અને બાજુઓ એક એક પર બરાબર પડે તો તે સરખા છે એમ જાણવું.

ખુણાનું નાનામોટાપણું, જે લીટીઓ, કામડીઓ, કે બાજુઓ મળવાથી તે ખુણો બને છે, તેમની લંબાઈ પર આધાર ન રાખતાં

તેમના ઓછાવત્તા પરિવર્તન પર (કુંડાળામાં ફરવા પર) આધાર રાખે છે. ખુણાની બાજુઓની વચ્ચે જે જગ્યા હોય છે, તેના નાનામોટાપણાની સાથે ખુણાના સરખાપણાનો કે નાનામોટાપણાનો બીલકુલ સંબંધ નથી, એ ધ્યાનમાં રાખવું.





દાખલા તરીકે, આપેલી આકૃતિઓમાં સમાન અક્ષરે બતાવેલા ખુણા સરખા છે એમ જાણવું.

કાટખુણો.

એક કાગળનો ચોરસ લઈને તેને બરાબર મધ્ય ભાગ ઉપર આડો વાળો. પડેલી ઘડીની ધારના બે ભાગો એક બીજા પર બરાબર આવે એવી રીતે ફરીથી કાગળને મધ્ય ભાગ પર વાળો. એવી રીતે વાળવાથી જે ખુણો થાય છે, તે પહેલાં દેખાડેલા કાટખુણાની બરાબર હોય છે, એ છોકરાઓને બતાવો. પછી એક ઘડી ઉઘાડીને બે કાટખુણા દેખાડો; અને પછી બીજી ઘડી ઉઘાડીને કાગળની વચ્ચેવચ્ચ બનેલા ચાર કાટખુણા દેખાડો. નિશાળમાંની વસ્તુઓના ખુણા બતાવીને તેમાંના કયા ખુણા કાટખુણાની બરાબર છે, અને કયા કાટખુણાથી નાના કે મોટા છે, એ પૂછો.

કાગળનો વર્તુળાકાર કકડો લઈને ઉપલો પ્રયોગ કરો, અને આ તથા પહેલાંના પ્રયોગ પરથી કાટખુણાની વ્યાખ્યા નીચે આપ્યા પ્રમાણે છોકરાઓને મોટેથી કઢાવો.

કાટખુણાની વ્યાખ્યા—એક લીટી પર બીજી લીટી પડી હોય ત્યારે તે (બીજી) લીટીની બંને બાજુના ખુણા સરખા થાય, તો તેમાંથી દરેક ખુણાને કાટખુણો કહે છે.

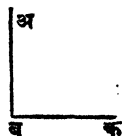
અથવા, ખુણાની બાજુઓના છેડાઓની વચ્ચે વર્તુળના એક ચતુર્થાંશની બરાબર અંતર હોય છે (ખુણાની બાજુઓના બે છેડા

મળીને વર્તુળના એક ચતુર્થાંશ ભાગમાં થઈને ફરે છે) ત્યારે કાટખુણો થાય છે.

ઉપર કાટખુણાનો જે ખ્યાલ આપ્યો છે, તે પરથી બધા કાટખુણા સરખા હોય છે એ જણાઈ આવશે.

ચાર પાંચ કાટખુણા લો. તેમનાં શિરોબિંદુઓ અને બાજુઓ એક એક પર બરાબર પડે, એવી રીતે તેમને એક બીજા પર મૂકો; એટલે સમજાના કાટખુણા સરખા હોય છે એ જણાઈ આવશે.

એક લીટી બીજીની સાથે કાટખુણો કરતી હોય, તો તે બેમાંની દરેક, બીજી પર લંબ છે એમ કહેવાય છે. દાખલા તરીકે, પાસેની આકૃતિમાં અબ, બક પર લંબ છે, અને બક, અબ પર લંબ છે.



કાગળ વાળીને આપેલી લીટી પર લંબ કાઢવાની રીત:-

પ્રયોગ—કાગળનો ગમે તેટલા કદનો કકડો લો. તેની ગમે તેમ ઘડી વાળો. આ ઘડીની ધારના ભાગ એક બીજા પર બરાબર પડે એવી રીતે ફરીથી કાગળ વાળો. કાગળ ઉઘાડી જુઓ. પહેલી ઘડીની સાથે બીજી ઘડી કેટલો મોટો ખુણો કરે છે? “કાટખુણો” આ પરથી કાગળ વાળીને કોઈ લીટી પર લંબ કાઢવા માટે તમે કઈ રીત શીખ્યા? “.....”

આપેલી લીટીની બહારના બિંદુમાંથી આપેલી લીટી પર લંબ કાઢવા માટે ઉપલી રીતનો ઉપયોગ તમે શી રીતે કરશો? “આપેલા બિંદુમાંથી કાગળ એવી રીતે વાળવો કે વાળવાથી પડતા આપેલી લીટીના ભાગ એક બીજા પર પડી રહે.”

બીજી રીત:-અબ આપેલી લીટી છે. ક આપેલું બિંદુ છે. અબ ઉપર કાગળ વાળો. એમ વાળતાં ક બિંદુ અબની બીજી બાજુના કાગળના ભાગને જ્યાં સ્પર્શ કરે ત્યાં પેન્સિલથી, કે કમાં વિભાજકની અણી ખોસીને, ક બિંદુ કરો; અને કક સાંધો.

પ્રશ્ન.

૧. કાગળના કકડા પર એક બિંદુ લો, અને કાગળ વાળીને તે બિંદુ આગળ કાટખુણો બનાવો. એવા કાટખુણા બધા મળીને કેટલા થાય છે ? “ચાર.”

સૂચના—ઘડિઆળ સંબંધી નીચેના બધા પ્રશ્નોમાં ઘડિઆળના બંને કાંટા સ્વતંત્ર છે, એટલે એક કાંટા ફરવો હોય તોપણ બીજો ફરતો નથી, એમ ધારવું.

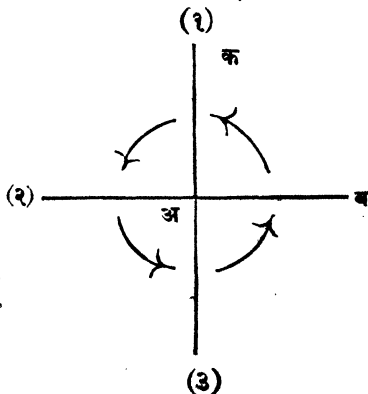
૨. ઘડિઆળના બંને કાંટા ત્રણ પર છે; તેમાંથી એક કાંટા ઉલટો ફેરવીને ૧૨ પર આણ્યો હોય, તો તે કાંટા વચ્ચે જે ખુણો થશે, તે કાટખુણાથી નાનો થશે કે મોટો ?

૩. એક કાંટા ૯ પર અને બીજો બરાબર ૩ પર છે, તો તે બે કાંટા વચ્ચેના ખુણો કેટલા કાટખુણા બરાબર છે ?

બિંદુની આસપાસ થતા ખુણાઓનો સરવાળો.

પાસેની આકૃતિમાં અક સળીનો છેડો (૧)થી દર્શાવેલા સ્થાનમાં આવે ત્યારે જો અબ, અક વચ્ચે એક કાટખુણો થાય, અને અકનો છેડો (૨)થી દર્શાવેલા સ્થાનમાં આવે ત્યારે જો અબ, અક વચ્ચે બે કાટખુણા થાય, તો

અક (૩)થી દર્શાવેલા સ્થાનમાં જાય ત્યારે અબ, અક વચ્ચે જે ખુણો થાય તે કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય ? અક સળી (૩)થી દર્શાવેલા સ્થાનમાંથી નીકળીને બાણની દિશામાં જઈ આખરે અબ પર પડે, તો અક સળી જે ખુણામાં થઈને ફરી, તે ખુણો



કેટલા કાટખુણા બરાબર થયો ?

પહેલાં કલા પ્રમાણે કામળ વાળીને કાટખુણો તૈયાર કરો. જે બિંદુમાં બંને સળો એક બીજાને છેદે છે, તે બિંદુની પાસે કેટલા કાટખુણા થાય છે ?

ઉપલા બે પ્રયોગ ઉપરથી, એક લીટી પોતાના એક છેડાના બિંદુની આસપાસ ફરતી ફરતી એક પ્રદક્ષિણા કરીને અસલની જગ્યાએ આવે છે, એટલે તે કેટલા કાટખુણામાં થઈને ફરી આવે છે ? “તે ચાર કાટખુણામાં થઈને ફરી આવે છે.”

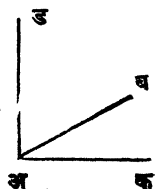
એક બિંદુમાંથી જુદી જુદી દિશાઓમાં લીટીઓ દોરી હોય, તે તેમની વચ્ચે જે ખુણા થાય છે તેમનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે, એ વિષે ઉપલા પ્રયોગ પરથી તમે શું શીખ્યા ?

વ્યાખ્યા.

કાટખુણાથી નાના ખુણાને સાંકડો ખુણો કહે છે.

કાટખુણાથી મોટા ખુણાને પહોળો ખુણો કહે છે.

જે બે ખુણા મળીને એક કાટખુણો બને છે તેમને એક બીજાના કોટિખુણા કહે છે. આપેલી આકૃતિમાં ડઅબ અને બઅક એક બીજાના કોટિખુણા છે.



બ

જે બે ખુણા મળીને બે કાટખુણા બરાબર થાય છે, તેમને એક બીજાના ન્યૂનતાપૂરક ખુણા કહે છે. આપેલી આકૃતિમાં કઅબ

ક

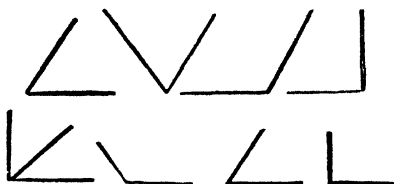
અ

ડ

અને બઅડ એક બીજાના ન્યૂનતાપૂરક ખુણા છે.

ખુણાના પ્રકાર.

નીચેના ખુણામાંથી સાંકડા ખુણા કયા, પહોળા ખુણા કયા, અને કાટખુણા કયા તે કહો.



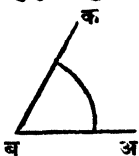
નીચે કેટલીક ખુણાઓની જોડો આપી છે, તેમાંથી કાટખુણા કયા અને ન્યૂનતાપૂરક ખુણા કયા તે કહો.



ખુણાઓના સંબંધમાં પરિભાષા.

જે બે લીટીઓ મળીને ખુણો થાય છે, તેમને તે ખુણાના ભુજ કે બાજુ કહે છે. પાસેની આકૃતિમાં અક, અબ તે ખુણાના ભુજ છે.

ખુણાના ભુજ એક બિંદુને જે બિંદુમાં મળે છે, તે બિંદુને તે ખુણાનું શિરોબિંદુ કહે છે. પાસેની આકૃતિમાં અ શિરોબિંદુ છે.

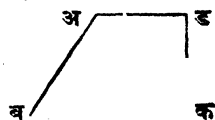


ખુણાનું નામ કહેતી વખતે શિરોબિંદુની પાસેનો અક્ષર વચ્ચે, અને તેની બે બાજુએ ખુણાની બે બાજુના છેડાની પાસેના અક્ષર મૂકવાનો રિવાજ છે. દાખલા તરીકે, પાસે આપેલા ખુણાને અકક કે અબઅ ખુણો કહે છે.



કોઈ પણ આકૃતિનું નામ આપવાની સામાન્ય રીત એવી છે, કે તેના કોઈ પણ એક ખુણાથી કે છેડાથી શરૂ કરીને તેની આસપાસ ડાબી બાજુએ થઈને પ્રદક્ષિણા કરતાં, પ્રદક્ષિણા પુરી થતા સુધી તેના ખુણા જે ક્રમે આવે તે ક્રમે તેના ખુણા પાસેના અક્ષરો ઉચ્ચારવા. તેથી બધી બાજુએ ઘેરાએલી આકૃતિઓનાં નામ ઘણી રીતે આપી શકાય છે.

દાખલા તરીકે, પાસેની આકૃતિ અડકડ, બકડઅ, કડઅબ, ડઅબક આ ચાર નામથી દર્શાવી શકાય છે. પણ ખુણાને ત્રીજી બાજુએ હદ હોતી નથી, તેથી તેની બાજુના છેડાનાં નામ દઈને તે બેજ રીતે દર્શાવી શકાય છે.



આકૃતિની આસપાસ જમણી બાજુએથી પ્રદક્ષિણા કરીને પણ કોઈ કોઈ વખત આકૃતિ દર્શાવાય છે. દાખલા તરીકે, ઉપલી આકૃતિ અડકડ, ડકડઅ, કડઅડ, બઅડક આ ચાર નામમાંથી ગમે તે નામથી દર્શાવી શકાય.

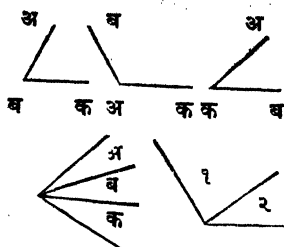
કોઈ કોઈ વખત ખુણામાં લખેલા ગમે તે કોઈ એક અક્ષર વડે ખુણો દર્શાવવામાં આવે છે. દાખલા તરીકે, પાસેની આકૃતિમાં અ ખુણો એટલે ચરલ ખુણો, અને બ ખુણો એટલે લરવ ખુણો.



ખુણો એ શબ્દને બદલે \angle આ ચિહ્ન કરવાનો રિવાજ છે; જેમકે \angle અડકડ એટલે અડકડ ખુણો; \angle અ એટલે અ ખુણો; \angle અ એટલે અ ખુણો.....વગેરે.

પાસેની આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે બ્યારે બે ખુણા એક બીજાને અડકેલા હોય ત્યારે તેમને પાસપાસેના કે અ પાસેના ખુણા કહે છે. આ આકૃતિમાં અડક અને ડક એ પાસપાસેના ખુણા છે. અડક ખુણાને અડક અને ડકનો સરવાળો કહે છે.





ઉપલી આકૃતિઓમાં ખુણા આપ્યા છે, તેમને અક્ષરોથી દર્શાવેલા તેમાં કયો ખુણો કયા ખુણાને અડકેલો છે તે કહો.

ખુણાઓની સરખામણી.

બે ખુણામાંથી કયો ખુણો મોટો છે તે જોવાની રીત:-
એક ખુણાનો છાપો* ટિથુપેપરથી, ટ્રેસિંગપેપરથી કે તેલીઆ કાગળથી લેવો; અથવા તે ખુણા જેવડો ખુણો દોરીને+ તે કાપી

* છાપો કે છાપ - આકૃતિ પર ટિથુપેપર રાખીને કરેલી નકલને છાપો કે છાપ કહે છે.

+ આપેલા ખુણા જેવડો ખુણો દોરવાની રીત:-જો અવક ખુણાની પ્રતિમા લેવી હોય તો તે ખુણા નીચે બીજો કાગળ રાખવો; અને ખુણાનાં અ, વ, ક, બિંદુઓમાં ટાંકણી ખોસવી. નીચેના કાગળમાં જે કાણું પડે તેમને અનુક્રમે અ, વ, ક, નામ આપીને અવ, વક સાંધવાં. અવક ખુણો અવક ખુણા બરાબર છે એમ જાણાઈ આવશે.

કાણુમાપકની મદદ વગર આપેલા ખુણા જેવડો ખુણો કાઢવાની બીજી રીત:-આપેલો ખુણો અવક, વક લીટીના પરિવર્તનથી બનેલો છે. વ મધ્યાબિંદુ ધારીને વચ ત્રિજ્યાએ વર્તુળ દોરો. આ વર્તુળના ફક્ત એક ભાગમાં થઈને વક ફરી છે માટે અવક જેટલો ખુણો કાઢવો હોય તો સરખા વર્તુળના તેટલા ભાગમાં થઈને ખુણાનો બુજ ફેરવો. એટલે

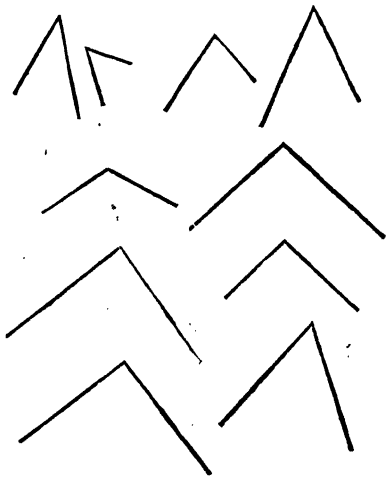


કાઢવો. પછી તે ખુણા બીજા ખુણા પર મૂકીને કયો ખુણો મોટો છે તે જોવું. એક ખુણાને બીજા પર મૂકતી વખતે શિરોબિંદુ શિરોબિંદુ પર અને એક ખુણાનો એક ભુજ બીજા ખુણાના એક ભુજ પર રાખવો. પછી ઉપલા ખુણાનો બીજો ભુજ નીચેના ખુણાની અંદર કે બહાર પડે તે પ્રમાણે ઉપરો ખુણો નાનો કે મોટો તે નક્કી કરવું.

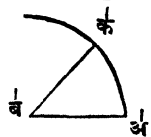
પાસે કેટલીક ખુણાની જોડો આપેલી છે, તેમાંથી દરેક જોડામાંનો કયો ખુણો મોટો અને કયો નાનો તે નક્કી કરો.

(પહેલાં આપેલા ખુણામાંથી કયો મોટો છે તે અટકળથી નક્કી કરો, અને પછી ઉપર આપેલી રીતે સરખામણી કરીને તમારો જવાબ ખરો છે કે નહિ તે જુઓ.)

નાની મોટી બાજુવાળા ચારપાંચ કાટ-ખુણા હાથે દોરો; તેમજ સાંકડા ખુણા અને પહોળા ખુણા દોરો.



બસ. તેટલા માટે **બ** જોડલી બીજી **બ** લીટી દોરો. **બ** મધ્યબિંદુ ધારીને **બ** ત્રિજ્યાએ બીજું વર્તુળ દોરો. **અ**ક ડૉસનું અંતર વિભાજ-કથી માપો, અને તે વિભાજક વડે તેટલોજ મોટો ભાગ બીજા વર્તુળમાંથી



ખુણાના વિભાગ અને ખુણા માપવાની રીત.

જેના એક ખુણો કાટખુણો હોય એવો કાગળનો કકડો લઈને કાટખુણાનો એક જુજ બીજ પર પડે એવી રીતે તેને વાળો. કાટખુણાના કેટલા ભાગ પડ્યા? “બે.” બે ભાગ સરખા છે કે નાના મોટા? “સરખા.” એમાંથી દરેક ખુણો કાટખુણાનો કેટલામો ભાગ છે? “અર્ધો.” આ ખુણાને ફરીથી વાળીને તેના બે સરખા ભાગ કરો. દરેક ખુણો કાટખુણાનો કેટલામો ભાગ છે? “એક ચતુર્થાંશ.”

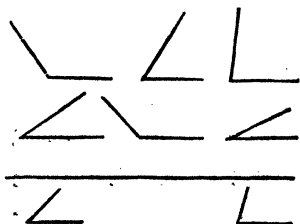
જેમ કુટના બાર સરખા ભાગ કરીને દરેક ભાગને ઇંચ એ નામ આપ્યું છે, તેમ એક કાટખુણાના ૯૦ સરખા ભાગ કદીને દરેક ભાગને અંશ એવું નામ આપેલું છે. (કોણમાપક પરના કાટખુણાના ભાગ દેખાડવા.)

ખુણાનું નાનામોટાપણું ખુણાની બાજુઓની વચ્ચેના વર્તુળભાગના નાનામોટાપણા પર આધાર રાખે છે. એટલા માટે વર્તુળના પરિઘના ૩૬૦ અંશ કે સરખા ભાગ કરીને આ દરેક ભાગ ઉપરથી બીજા બધા ખુણા માપવાનો રિવાજ છે. ખુણા માપવાનું અંશથી મોટું માપ

કાપી કાઢો. ધારો કે એ ભાગ **અંક** છે. **બંક** સાંધો. **અંક** ખુણો આપેલા ખુણાની બરાબર હોવો જોઈએ એ ખુલ્લું છે.

નીચે આપેલા ખુણા જેવડા ખુણા દોરો.

પાસે આપેલી લીટી જેવડી
લીટી દોરીને તેના બે છેડા
આગળ, આપેલા બે ખુણા જેવડા
ખુણા કરો.



કાટખુણો છે. [પૃથ્વી સૂર્યની આસપાસ પ્રદક્ષિણા કરતી વખતે રોજ વર્તુળના ૩૬૦મા ભાગમાં થઈને જાય છે; આ ઉપરથી વર્તુળનો ૩૬૦મો ભાગ ખુણો માપવા માટે લેવાનો રિવાજ પડી ગયો હોય એમ લાગે છે.]

[અંશ એ શબ્દને ઠેકાણું ° આ ચિહ્ન વાપરે છે; જેમકે:-૧૦° એટલે દસ અંશ; ૨૨° એટલે ૨૨ અંશ.]

પ્રશ્ન.

૧. એક કાટખુણામાં ૯૦ અંશ હોય છે; તો અર્ધા કાટખુણામાં કેટલા ? ૫૦ કાટખુણામાં કેટલા ? $\frac{1}{2}$ કાટખુણામાં કેટલા ?

૨. ઘડિઆળમાં બરાબર એક વાગે છે ત્યારે એ કાંટા વચ્ચે જે ખુણો હોય છે, તે કાટખુણાનો કેટલામો ભાગ હોય છે ? તે ખુણામાં અંશ કેટલા ?

૩. ઘડિઆળમાં બરાબર એ વાગે છે ત્યારે એ કાંટા વચ્ચે જે ખુણો થાય છે, તે કાટખુણાનો કેટલામો ભાગ ? તે ખુણામાં અંશ કેટલા ?

૪. ઘડિઆળમાં ૫, ૬, ૭, ૮, ૯.....વગેરે વાગે છે ત્યારે એ કાંટા વચ્ચેનો ખુણો કેટલા અંશનો હોય છે ?

૫. નીચેની દિશાઓની વચ્ચે કેટલા અંશના ખુણા થાય છે તે કહો:-પૂર્વ અને પશ્ચિમ, પૂર્વ અને દક્ષિણ, દક્ષિણ અને નૈઋત્ય, પશ્ચિમ અને ઈશાન, વાયવ્ય અને અગ્નિ, ઉત્તર અને ઈશાન-પૂર્વ,* વાયવ્ય-ઉત્તર અને પૂર્વ.....વગેરે.

ખુણા માપવાની રીત.

કોણમાપકના ઉપયોગના સંબંધમાં સૂચના—જે ખુણો માપવો હોય તેના શિરોબિંદુ પર કોણમાપકનું મધ્યબિંદુ (એટલે સીધી ધારના મધ્યભાગ પરની ખાંચ) રાખીને ખુણાની એક બાજુ

* ઈશાન ને પૂર્વની બરાબર વચ્ચેની દિશા.

પર કોણમાપકની એક બાજુ મૂકવી; અને ખુણાની બીજી બાજુ કોણમાપકના જે અંશની નિશાની નીચે થઈ જતી હોય, તેટલા અંશનો તે ખુણો છે એમ સમજવું.

ખુણાની ડાબી બાજુ પર કોણમાપકની ડાબી બાજુ મૂકી હોય, તો ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ તરફ વધતા જતા કોણમાપક પરના આંકડા ઉપરથી ખુણાના અંશ જાણવા; અને ખુણાની જમણી બાજુ પર કોણમાપકની જમણી બાજુ મૂકી હોય, તો જમણી બાજુથી ડાબી બાજુ તરફ વધતા જતા કોણમાપક પરના આંકડા ઉપરથી ખુણાના અંશ સમજવા. તેમ છતાં પણ કયા આંકડાનો ઉપયોગ કરવો એ વિષે ગુંચવણ ન પડે એટલા માટે, ખુણાની જમણી બાજુ પર કોણમાપકની જમણી બાજુ મૂકવાની હંમેશા ટેવ રાખવી એ સાફ છે.

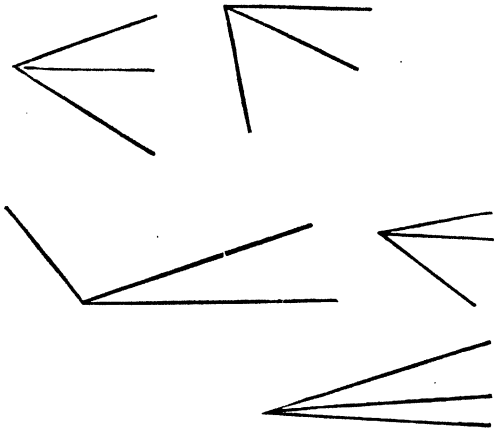
ખુણો સાંકડો છે કે પહોળો છે, તે પહેલાં અટકળાથી જોવું; એટલે ખુણો માપતાં કોણમાપક પરના આંકડા ખોટી બાજુએથી ગણવામાં આવ્યા હોય, તો થએલી ભૂલ જણાઈ આવશે.

પ્રશ્ન.

૧. ત્રિકોણમાપના ખુણા કેટલા અંશના છે તે જુઓ.
૨. નીચે આપેલા ખુણા માપો, અને તે કેટલા અંશના છે તે કહો.

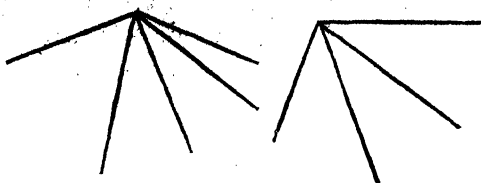


૩. નીચે આપેલા પાસપાસેના ખુણામાંના દરેક ખુણો માપો; અને તે બે ખુણાનો સરવાળો કરો. પછી આખો ખુણો માપો, અને તે પરથી પહેલાંના જવાબ ખરા છે કે કેમ તે જુઓ.



૪. ઉપર પ્રમાણે નીચે આપેલા ખુણાના સંબંધમાં પ્રયોગ કરો. (બે જવાબમાં એક અંશ સુધી તકાવત પડે તો તે દરજુનર કરવામાં હરકત નથી.)





૫. એક વર્તુળ દોરો, અને તેના પરિઘના તમારી તરફના ભાગ પર કેટલાંક, અને તમારાથી આધેના ભાગ પર કેટલાંક, એવી રીતે બધાં મળીને ગમે તે પાંચ બિંદુ લો. આ બિંદુઓમાંથી વર્તુળના મધ્યબિંદુ સુધી લીટીઓ દોરો, અને તેથી થતા એક પછી એક પાંચ ખુણા માપો, અને તેમનો સરવાળો કરો. આ ઉપરથી વર્તુળમાં કેટલા કાટખુણા હોવાનું જણાઈ આવે છે ?

૬. એક વર્તુળ દોરો અને કંપાસ વડે તેના પરિઘના ચાર-પાંચ સરખા ભાગ પાડો. આ ભાગોનાં છેદનબિંદુઓમાંથી* વર્તુળના મધ્યબિંદુ સુધી લીટીઓ દોરો. આ લીટીઓની વચ્ચેના ખુણા માપો, અને તેમને એક બીજા સાથે સરખાવો. શું માલમ પડ્યું ? “ તે સરખા છે. ”

૭. ગમે તેવા ખુણા દોરો અને તેમના અંશ અટકળથી નક્કી કરો. પછી કોણમાપક વડે ખુણા પ્રત્યક્ષ માપીને તમારી અટકળ કેટલે દરજ્જે ખરી છે તે જુઓ. ખુણા સાધારણ રીતે બરાબર માપતાં આવડે ત્યાંસુધી અભ્યાસ જરૂરી રાખો. (અટકળથી માપવામાં ૫ અંશનો તફાવત પડે ત્યાંસુધી ચાલે.)

ખુણો દુભાગવાની રીત (કાગળની ઘડી વાળીને):—આપેલા \angle અથવા જેવડો ખુણો દોરો, અને તેને કાપી કાઢો. અથ, થક પર

* છેદનબિંદુ—કોઈ પણ સીધી કે વાકી લીટીને જે બિંદુમાં છેદવામાં આવે છે, તે બિંદુને છેદનબિંદુ કહે છે.

બરાબર પડે એવી રીતે કાગળ વાળો. વાળવાથી ખુણાના જે જે ભાગ થાય છે, તે એક બીજાની બરાબર છે એમ જણાઈ આવશે.

[આ પછીનો ભાગ શીખવતા પહેલાં કૌંસ, પરિધ, જ્યા, વર્તુળનું મધ્યબિંદુ, એ સંબંધી જે માહિતી પહેલાં આપેલી છે તેનું પુનરાવર્તન કરાવવું.]

બીજી રીત:—આપેલા અઘક ખુણાનું જ મધ્યબિંદુ અને ગમે તે ત્રિજ્યા લઈને અઘ, ઘકને અનુક્રમે ઢ તથા ઈમાં છેદે એવો કૌંસ દોરો. ઢ, ઈ મધ્યબિંદુ અને ઢઈ જેટલી ત્રિજ્યા લઈને કમાં એક બીજાને છેદે એવા કૌંસ દોરો. કઘ સાંધો. કઘ આપેલા ખુણાને દુભાગે છે.

૮. કેટલાક ખુણા લઈને તેમને ઉપર કહેલી રીતે દુભાગો, અને તેમના વિભાગ કોણમાપકથી માપીને તે બરાબર છે કે નહિ તે જુઓ.

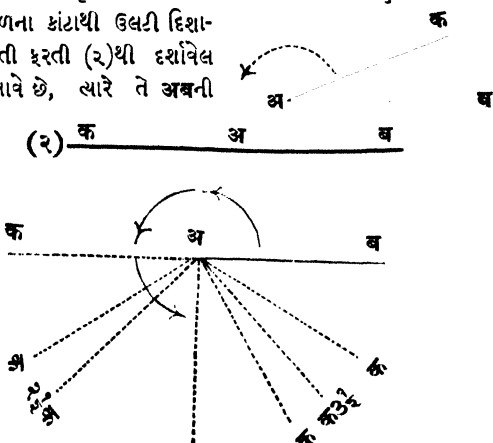
કૌંસ દુભાગવાની રીત:—અઘ આપેલો કૌંસ છે. અઘનો છાપો લો. અ, ઘ પર પડે એવી રીતે ઘડી વાળો. ઘડીથી અઘના જે જે વિભાગ થાય છે, તે એક બીજા પર બરાબર આવી રહે છે; તે પરથી તે સરખા છે એ સ્પષ્ટ થાય છે.

બીજી રીત:—એક અઘ કૌંસ લો. અ મધ્યબિંદુ અને અઘના અર્ધથી જરા મોટી ત્રિજ્યા લઈને એક કૌંસ દોરો. તેટલીજ ત્રિજ્યા અને જ મધ્યબિંદુ લઈને આ કૌંસને ક અને ઢમાં છેદે એવો બીજો કૌંસ દોરો. કઢ સાંધો. અઘ કૌંસને કઢ દુભાગે છે.

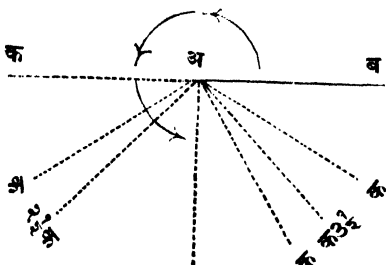
૯. એક વર્તુળ દોરો. તેમાં ગમે તે એક અઘ કૌંસ લો. અઘ કૌંસને ક બિંદુમાં દુભાગો. વર્તુળના મધ્યબિંદુ મને અ, ઘ, કની સાથે સાંધો. અમક અને ઘઘક ખુણા માપો અને તેમને સરખાવો. બીજા કૌંસ લઈને ઉપલો પ્રયોગ કરો. આ ઉપરથી વર્તુળના મધ્યબિંદુ આગળ થતા ખુણા અને તે ખુણાની બાજુઓની વચ્ચેના કૌંસોની વચ્ચે શા સંબંધ હોવાનું જણાઈ આવે છે ?

બહિર્વકકોણ.

પાસેની આકૃતિમાંની અક સળી જ્યારે બાણની દિશામાં (ઘડિઆળના કાંટાથી ઉલટી દિશામાં) ફરતી ફરતી (૨)થી દર્શાવેલ સ્થળે આવે છે, ત્યારે તે અબની



(૨) ક અ બ



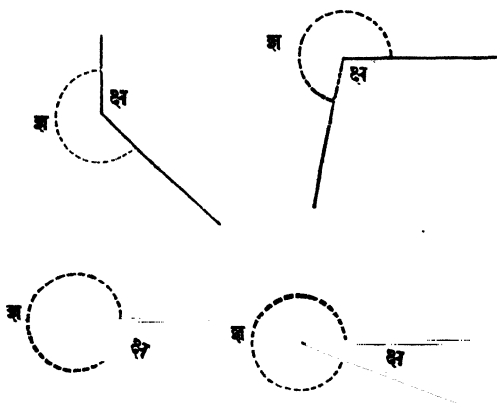
(૩)ક

સાથે બે કાટખુણા કરે છે. હવે જો તેજ સળી, વળી આગળ ફરતી ફરતી (૩)થી દર્શાવેલ સ્થળે આવશે, તો તે અબ સાથે જો ખુણો કરશે તે બે કાટખુણાથી મોટો થશે.

આ પ્રમાણે અક સળી (૨)થી દર્શાવેલા સ્થળ આગળથી શરૂ કરી બાણની દિશામાં ફરતાં ફરતાં પાછી અબ ઉપર જઈ પડે ત્યાંસુધીમાં અબ સાથે જો ખુણો કરશે, તે બે કાટખુણાથી મોટા અને ચાર કાટખુણાથી નાના થશે. એવા ખુણાને બહિર્વક ખુણો કે બહિર્વકકોણ કહે છે.

ખુણાનો ફરતો ભુજ સ્થિર ભુજથી શરૂ થતા વર્તુળના અર્ધા ભાગ કરતાં વધારે ભાગમાં થઈને જવાથી જો ખુણો થાય છે, તેને બહિર્વકકોણ કહે છે, એમ કહીએ તોપણ ચાલે.

નીચેની આકૃતિઓમાં ટપકાંની લીટીઓથી દર્શાવેલા ખુણા અહિર્વકકોણ છે. આ ખુણા ઉલટી દિશામાંથી જોયા હોય તો અહિર્વક દેખાતા નથી એ ઉધાહું છે.



[ઉપલા ખુણામાંથી કોઈ પણ ખુણો જાની બાજુથી જોયો હોય, તો તે એ કાટખુણા કરતાં નાનો દેખાય છે; પણ તે જાની બાજુથી જોયો હોય તો એ કાટખુણા કરતાં મોટો દેખાય છે. જાની બાજુ પરનો ખુણો અંતર્વક ખુણો કહેવાય છે. અર્થાત્, અંતર્વક ખુણો એટલે એ કાટખુણાથી નાનો ખુણો.]

પ્રશ્ન.

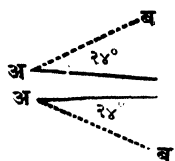
૧. ઘડિઆળમાં ૯ વાગે છે ત્યારે કલાકના અને મિનિટના કાંટા વચ્ચે કેટલા અંશનો અહિર્વકકોણ થાય છે ?
૨. એ કાંટાની વચ્ચેનો અહિર્વક ખુણો અંતર્વક ખુણાથી ત્રણગણો છે; તો તે અહિર્વક ખુણો કેટલો મોટો છે ?

૩. ઉપલા પ્રશ્નમાં બહિર્વક ખુણા અંતર્વક ખુણાથી બમણો, ૪ ગણો, ૫ ગણો છે, એમ ધારીને જવાબ કાઢો.

સૂચના—એ લીટીઓની વચ્ચેનો ખુણો માપતી વખતે અંતર્વક ખુણો લેવાનો રિવાજ છે, એ ધ્યાનમાં રાખવું.

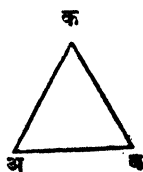
સાપેક્ષ દિશા.

એક સ્થળ બીજા સ્થળની કઈ દિશામાં છે તે જોવાની રીત:—ધારો કે **અ** સ્થળ **અ** સ્થળની કઈ દિશામાં છે એ શોધી કાઢવું છે. **અ** સ્થળ મુખ્ય ચાર દિશામાંથી લગભગ કઈ દિશાની પાસે છે એ પહેલાં જોવું. જો તે પૂર્વ તરફ છે એમ લાગે, તો અમાં થઈને જમણે એવી એક સીધી લીટી બરાબર પૂર્વ તરફ દોરવી. પછી **અ** થી **અ** સુધી લીટી દોરવી, અને આ લીટીનો પૂર્વ તરફ દોરેલી લીટીની સાથે જે ખુણો થાય છે તે ખુણો માપવો. ધારો કે આ ખુણો ૨૪ અંશનો છે. હવે જો **અ** લીટી પૂર્વ બતાવનારી લીટીથી ઉત્તર તરફ હોય, તો **અ**ની દિશા ‘પૂર્વની ઉત્તરમાં ૨૪ અંશ છે’ એમ કહેવું; અને **અ** લીટી પૂર્વ બતાવનારી લીટીની દક્ષિણમાં હોય, તો **અ**ની દિશા ‘પૂર્વની દક્ષિણમાં ૨૪ અંશ છે’ એમ કહેવું.



પ્રશ્ન.

૧. **અ** અને **અ** ખુણા દરેક ૬૦ અંશના છે. હવે જો **અ** લીટી પૂર્વ-પશ્ચિમ હોય, તો **ક**, અને કઈ દિશામાં છે? **અ**ની કઈ દિશામાં છે?



૨. એક માણસ **અ** સ્થળથી નીકળી ચાર માઇલ બરાબર ઉત્તર તરફ જાય છે, અને ત્યાંથી ૪ માઇલ બરાબર પશ્ચિમ તરફ જઈને

બ સ્થળે પહોંચે છે; તો બ, અની કઈ દિશામાં છે ? (એક માઇલ માટે અર્ધો ઇંચ એ સ્કેલ લઈને આકૃતિ દોરો.)

[કોઈ પણ સ્કેલ લઈને દોરેલી આકૃતિની મદદથી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ કાઢો.]

૩. જેની લંબાઈ ૪૦ ફુટ છે અને પહોળાઈ ૨૦ ફુટ છે, એવા અઘકડ લંબચોરસમાં ક, અની કઈ દિશામાં છે ? અથવા બરાબર પૂર્વપશ્ચિમ છે. (સ્કેલ-૧"=૨૦ ફુટ.)

૪. બની પશ્ચિમે અ ૨.૫ માઇલ છે અને અની દક્ષિણમાં ક ૪.૫ માઇલ છે; તો બથી ક કેટલું આધું છે અને બની કઈ દિશામાં છે ?

૫. એક માણસ અ સ્થળથી ૩ માઇલ બરાબર દક્ષિણ તરફ જાય છે. ત્યાંથી તે બરાબર ઈશાન તરફ ૮ માઇલ જઈને બ સ્થળે પહોંચે છે; તો અથી બ કેટલું આધું છે, અને અની કઈ દિશામાં છે ?

૬. અ, બની વાયવ્યમાં ૧૭.૫ માઇલ છે; બ, કની ઈશાનમાં ૨૩ માઇલ છે; તો ક, અથી કેટલું આધું છે, અને અની કઈ દિશામાં છે ?

૭. બ અને ક એ સ્થળો અથી બરાબર ૫ માઇલ પર છે; અને તે અનુક્રમે દક્ષિણની પશ્ચિમમાં 36° અને પશ્ચિમની દક્ષિણમાં 14° છે; તો બ, કની કઈ દિશામાં છે, અને તે બેની વચ્ચેનું અંતર કેટલું છે ?

૮. બ અને ક સ્થળોની વચ્ચે ૩.૫ માઇલનું અંતર છે, અને બ, અની બરાબર ઉત્તરમાં છે. ક, બની બરાબર પૂર્વમાં અને અની બરાબર ઈશાનમાં છે; તો કનું અથી અંતર કેટલું ?

૯. અ અને બ બેટોની વચ્ચે ૮૦૦ ફુટનું અંતર છે. બ, અની બરાબર ઉત્તરે છે. એક વહાણ બથી નીકળીને બરાબર પૂર્વ તરફ ૫ મિનિટ સુધી ગયા પછી તેની દિશા અની ઉત્તરની પૂર્વમાં ૫૭ અંશ હોવાનું જણાઈ આવે છે; તો તે વહાણ ૫ મિનિટમાં કેટલું અંતર આધ્યું, અને તેનો દર કલાકે વેગ કેટલો ?

૧૦. એક વિભાજકની બાજુઓની લંબાઈ ૧૦ સે. મી. છે, અને તેમની વચ્ચે ૩૫૦નો ખુણો થતા સુધી તે આધી કરેલી છે; તો વિભાજકની બાજુઓની અણીઓની વચ્ચે કેટલું અંતર છે?

૧૧. એક સીધી વાડથી ૨૦ હાથને અંતરે દાટેલા ખુટા સાથે એક બકરીને દોરીથી બાંધેલી છે; અને તે બકરી ખુટાથી ૩૫ હાથ આધી જઈ શકે એટલી તે દોરી લાંબી છે; તો તે બકરી તે વાડનો કેટલો ભાગ ખાઈ શકશે?

અમુક અંશનો ખુણો કરવા વિષે.

અમુક અંશનો ખુણો દોરવાની રીત:—એક સીધી લીટી દોરવી. તે લીટીના ડાબા છેડા પર કોણમાપકનું મધ્યબિંદુ, અને તે લીટી પર કોણમાપકની જમણી બાજુ બરાબર પડે એવી રીતે કોણમાપક મૂકવો. પછી જેટલા અંશનો ખુણો કરવો હોય, તેટલા અંશ બતાવનારી કોણમાપક પરની લીટીના છેડા પાસે કાગળ પર પેન્સિલથી ઝીણું ટપકું કરવું, અને તે ટપકાથી પહેલી લીટીના ડાબા છેડા સુધી લીટી દોરવી.

(પેન્સિલને બદલે વિભાજકની અણીથી કે ટાંકણીથી આ બિંદુ લીધું હોય તો ખુણો વધારે બરાબર નીકળશે.)

નીચેના અંશના ખુણા કરો:—

(૧) ૩૦, ૬૦, ૪૫, ૧૩૫, ૭૫, ૧૦૦, ૧૨૦.

(૨) ૧૮, ૨૩, ૮૯, ૧૨૫, ૫૭, ૬૪, ૧૧૧, ૧૫૨, ૧૭૮.

૩૦ અંશનો અબક ખુણો કરો અને તેમાં ૨૫ અંશનો કઢ ખુણો ઉમેરો. એવી રીતે બનેલો અબક ખુણો માપો, અને તેના અંશ બરાબર ૫૫ થાય છે કે કેમ તે જુઓ. થતા ન હોય તો ભૂલ ક્યાં છે તે ખોળી કાઢો.

અબક અને કઢ એ ખુણા અનુક્રમે નીચેના અંશના લઈને ઉપલેખ પ્રયોગ કરો:—

૨૦, ૭૦; ૫૨, ૨૮; ૪૩, ૧૭; વગેરે.

અવક, કબહ, હલઈ ખુણા અનુક્રમે ૧૭, ૨૩, ૩૮ અંશના હો. અલઈ ખુણા માપો, અને તેના અંશ ૭૮ થાય છે કે કેમ તે જુઓ. થતા ન હોય તો પહેલાં માપતી વખતે ભૂલ ક્યાં થઈ તે શોધી કાઢો.

અવક, કબહ, હલઈ એ ખુણા નીચેના અંશના લઈને ઉપર મુજબ પ્રયોગ કરો:—

(૧) ૭૦, ૧૨, ૨૮; (૨) ૧૧૬, ૨૦, ૩૪; (૩) ૫, ૧૮, ૧૦૦.

અવક ખુણા ૧૩૦°નો લઈને તેમાંથી ૪૦°, ૩૦°, ૨૫°ના ખુણા કાપી કાઢો. બાકી રહેલો ખુણા ૩૫°નો થાય છે કે નહિ તે જુઓ. ન થાય તો ભૂલ ક્યાં થઈ તે જુઓ.

બીજા ખુણા લઈને ઉપલો પ્રયોગ ફરીથી કરો.

નીચેના અંશના ખુણા અટકળથી કાઢો, અને પછી તેમને પ્રત્યક્ષ માપી જુઓ. ખુણા સાધારણ રીતે બરાબર દોરતાં આવડે ત્યાંસુધી અભ્યાસ જરૂરી રાખો:—૪૫°, ૨૨.૫°, ૩૦°, ૨૦°, ૬૦°, ૧૦°, ૭૦°, ૮૦°, ૧૨૦°, ૧૩૫°.

પાસેની આકૃતિઓને ત્રિકોણ કહે છે. (ત્રિ=ત્રણ, કોણ=ખુણો.

જેને ત્રણ ખુણા હોય એવી આકૃતિ.) આ આકૃતિઓની માફક જે આકૃતિઓની હદ



ત્રણ સીધી લીટીઓથી બંધાએલી હોય તે બધી આકૃતિઓને ત્રિકોણ કહે છે.

નીચેનાં માપ ઉપરથી ત્રિકોણ બનાવો:—

અવ=૧.૩", \angle અવક=૩૦°, \angle લઅક=૬૦°.

„ = ૧", „ ૫૦°, „ = ૫૦°.

„ = ૧.૮", „ ૬૦°, „ = ૩૦°.

.....વગેરે.

* ધ્યાન—ત્રણ બાજુ કે સીધી લીટીઓ વડે જેની હદ બંધાએલી હોય છે તે આકૃતિને ત્રિકોણ કહે છે.

એક લીટી બીજી પર પડવાથી થતા ખુણા.

અવક ગમે તેટલા કદનો સાંકડો ખુણો લો. તેની અવ બાજુ
ડ સુધી વધારો. કવડ ખુણો ક
સાંકડો છે કે પહોળો ?

ડ વ અ

અવક કાટખુણો દોરો. તેની અવ બાજુ ડ સુધી લંબાવો.
કવડ ખુણો સાંકડો છે કે પહોળો ?

ગમે તેવડો એક અવક પહોળો ખુણો કાઢો. તેની અવ બાજુ
ડ સુધી વધારો. કવડ ખુણો સાંકડો છે કે પહોળો ?

અવક કે કાટખુણા જેવડો કાઢો. અવને ડ સુધી વધારો.
કવડ ખુણો માપો અને તે કેટલા કાટખુણા બરાબર છે તે કહો.
(કોણમાપકનો ઉપયોગ કરીને નીચેના પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો.)

અવક લીટી પર ચક્ર લીટી ઉભી છે—

અને અવક ખુણો ૫૩ અંશનો છે; તો કવડ કેવડો હશે ?

” ” ૭૮ ” ” ” ”

” ” ૧૧૦ ” ” ” ”

” ” ૧૨૭ ” ” ” ”

ઉપલા પ્રશ્નો પૈકી દરેક પ્રશ્નમાં અવક ખુણો કાટખુણાથી કેટલે
અંશે ઓછો કે વત્તો છે તે જુઓ, અને તેવીજ રીતે કવડ ખુણો
કાટખુણાથી કેટલે અંશે વત્તો છે કે ઓછો છે તે જુઓ. આ ઉપરથી
અવક અને કવડ ખુણાઓની વચ્ચે શો સંબંધ જણાઈ આવે છે ?

“તે એક બીજાના ન્યૂનતાપૂરક છે.”

ઉપલા પ્રયોગ પરથી, એક લીટી બીજી પર પડવાથી થતા
પાસપાસેના ખુણાઓનાં સંબંધમાં કયો નિયમ નીકળે છે ?

“એક લીટી બીજી પર પડી હોય, તો બીજી લીટીની
એક બાજુ પર જે પાસપાસેના ખુણા થાય છે, તેમના
સરવાળો બે કાટખુણાની બરાબર હોય છે.”

(કોણમાપકનો ઉપયોગ કર્યા વગર નીચેના પ્રશ્નોના ઉત્તર કહો.)

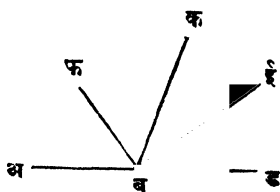
અવક એક સીધી લીટી છે. તેની સાથે—

ચક લીટી 64° નો ખુણો કરે છે, તો કચડ ખુણો કેવડો હોવો જોઈએ?

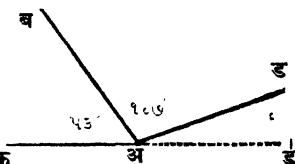
” 120° ” ” ”

” 129° ” ” ”

અવક લીટી લો. તેની સાથે ગમે તેવડો ખુણો કરે એવી ચક લીટી દોરો. કાગળ વાળીને અવક ખુણાને દુભાગો. તેજ પ્રમાણે કચડ ખુણાને દુભાગો. ખુણા દુભાગનારા સળ ચક અને ચક લીટીઓ વડે દર્શાવો. ચક ખુણો માપો. તે કેવડો છે? આ ઉપરથી અવક અને કચડ ખુણાઓના સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર જણાઈ આવે છે? “ એ કાટખુણા બરાબર.”



અવ લીટી લો. તેની એક બાજુએ ચક ૫૩ અંશનો ખુણો કરો. બીજી બાજુએ ચક 109° અંશનો ખુણો કરો. કચડ ખુણો કેટલા અંશનો થાય છે? તે એ કાટખુણા કરતાં કેટલે અંશે ઓછો કે વધારે છે? કચડ સીધી



લીટી છે કે? કચડ સીધી લીટી દોરો. તે સીધી લીટી થવા માટે ચક અને ચક એ ખુણાઓના સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થવો જોઈએ?

ઉપલા પ્રશ્નોમાં ચક અને ચક અનુક્રમે 40° અને 110° , 104° અને 74° , 41° અને 124° , 110° અને 60° , 44° અને 144° , 30° અને 170° લો અને ઉપરના જોવાળ પ્રયોગ કરી જુઓ.

આ ઉપરથી કબડ લીટી સીધી હોવા માટે અવક અને કબડ ખુણા વચ્ચે કેવો સંબંધ હોવો જોઈએ (એટલે તેમનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થવો જોઈએ) એ વિષે કયો સામાન્ય નિયમ જણાઈ આવે છે ? “ તેમનો સરવાળો બે કાટખુણા બરાબર હોવો જોઈએ. ”

અવક અને કબડ ખુણા અનુક્રમે 61° અને 103° હોય તો અવક સીધી લીટી થશે કે ?

અવક અને કબડ ખુણા અનુક્રમે 111° અને 92° હોય તો અવક સીધી લીટી થશે કે ?

અવક અને કબડ ખુણા અનુક્રમે 102° અને 81° હોય તો અવક સીધી લીટી થશે કે ?

અવક અને કબડ ખુણા અનુક્રમે 91° અને 110° હોય તો અવક સીધી લીટી થશે કે ?

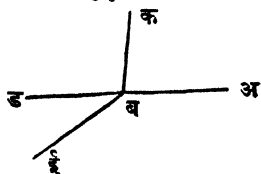
અવક અને કબડ ખુણા અનુક્રમે 40° અને 130° હોય તો અવક સીધી લીટી થશે કે ?

અવક અને કબડ ખુણા અનુક્રમે 134° અને 42° હોય તો અવક સીધી લીટી થશે કે ?

ઉપલા પ્રયોગો ઉપરથી કયો સામાન્ય નિયમ નીકળે છે ?

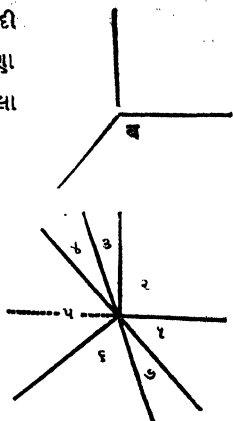
“જો બે પાસપાસેના ખુણાનો સરવાળો બે કાટખુણા બરાબર હોય, તો તેમના બહારના ભુજો એક સીધી લીટીમાં હોય છે.”

પાસેની આકૃતિમાં અવક અને કબડ ખુણાઓનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર છે ? આ ઉપરથી અવક, કબડ, ડબઈ, અને ફેબઅ ખુણાઓનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થશે એ તમે કહી શકશો ?



જ બિંદુમાંથી મધ્ય લીટીએ જુદી જુદી દિશામાં દોરો. તેથી બનતા દરેક ખુણા માપો. તેમનો સરવાળો કરો. તે કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે ?

પાસેની આકૃતિમાં સાત ખુણા એક બિંદુની જોડે આવેલા દર્શાવ્યા છે. એમનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થશે, એ ખુણો પ્રત્યક્ષ માપ્યા વગર કહો.



ઉપલી આકૃતિમાંના છ ખુણાનો સરવાળો $3\frac{1}{2}$ કાટખુણા હોય, તો બાકી રહેલો ખુણો કેટલો મોટો હોવો જોઈએ ?

ઉપલા પ્રશ્નમાં છ ખુણાનો સરવાળો $2\frac{3}{4}$, $3\frac{1}{2}$, $2\frac{3}{4}$ કાટખુણા ધારીને ઉત્તર કાઢો.

જાનક કાટખુણો છે. જાનકે જ સુધી વધારેલી છે, અને કાનકે ડ સુધી વધારેલી છે. તો કાજક, જાકડ, ડાજક, એ પૈકી દરેક ખુણો કાટખુણો છે એ સિદ્ધ કરો.

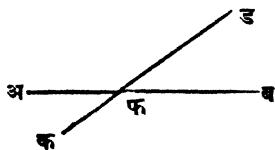


એક અજક લીટી લો. તે પર ગમે તે જાડ લીટી દોરો. કાગળની ધડી વાળીને અજક ખુણાને દુભાગો, અને તેજ રીતે જાડ ખુણાને દુભાગો. કાગળ પરના એ સળી વચ્ચેનો ખુણો કેટલો મોટો છે તે ખુણાને પ્રત્યક્ષ માપ્યા વગર કહો. ઉત્તરતું કારણ આપો.

એક બીજને છેદતી એ સીધી લીટીઓની વચ્ચેના ખુણા.

ગમે તેટલી લાંબી એ કામડી કે સળી લેા, અને તે એકજ દિશામાં પડે એવી રીતે તેમને એક ઉપર એક મૂકીને વચ્ચે કોઈ પણ ઠેકાણે ટાંકણી ખોસો. ટાંકણી સહિત કામડીઓ ઉંચકીને ટાંકણી એક ઘડિઆળની (કાગળની) તાસકના* મધ્યબિંદુમાં ખોસો. પછી એ કામડી પેંકી એકનો એક છેડો પકડીને તેને ગમે તે દિશામાં ફેરવો. તે છેડાની, વર્તુળના $\frac{1}{2}$ ભાગ જેટલી પ્રદક્ષિણા થાય છે, એટલે બીજન છેડાની પણ $\frac{1}{2}$ જેટલીજ પ્રદક્ષિણા થાય છે. પહેલા છેડાની $\frac{1}{2}$ પ્રદક્ષિણા થાય છે, એટલે બીજની પણ $\frac{1}{2}$ પ્રદક્ષિણા થાય છે. તેમજ પહેલાની $\frac{1}{2}$ પ્રદક્ષિણા થાય છે એટલે બીજની પણ તેટલીજ થાય છે, એ ધારીને જોવા છોકરાઓને કહેવું. કામડીના જુદા જુદા ભાગોમાં ટાંકણી ખોસીને ઉપલો પ્રયોગ કરો. કામડીના બંને છેડાની પ્રદક્ષિણા સરખી થતી, એ કામડીના જે એ ભાગો ટાંકણીની આસપાસ ફરે છે, તેમની લંબાઈના ઓછાવત્તાપણા પર અથવા સરખાપણા પર આધાર રાખે છે કે? “ના.”

ઉપલા પ્રયોગમાંથી નીકળતા નિયમની મદદથી નીચેના પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો:—



ક

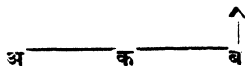
* ઘડિઆળની તાસકને બદલે પહેલાં ૨૧મા પાના પર કહેલી આકૃતિ લીધી હોય તોપણ ચાલે.

અવ અને કહ કામડીઓને એક બીજી પર રાખીને ક સ્થળે ટાંકણીથી જડી દીધી છે. હવે કહ કામડીનો હ છેડો જે વર્તુળના $\frac{1}{2}$ ભાગમાં થઈ જતાં સુધી ફેરવ્યો હોય, તો ક છેડો વર્તુળના કેટલામા ભાગમાં થઈને ફરશે ?

ઉપલા પ્રયોગમાં હ છેડો એક કાટખુણામાં (વર્તુળના $\frac{1}{2}$ ભાગમાં) થઈને જતાં સુધી ફેરવ્યો હોય, તો ક છેડો કેટલા મોટા ખુણામાં થઈને ફરશે ?

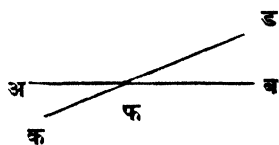
ઉપલા પ્રયોગો પરથી, પોતાનામાંના કેઈ પણ બિંદુની આસપાસ ફરતી લાકડીના કે લીટીના બે છેડા જે ખુણાઓમાં થઈને ફરે છે, તે ખુણાઓનો એક બીજા સાથે શો સંબંધ હોવાનું જણાઈ આવે છે ?

“ જ્યારે કેઈ લીટી પોતાનામાંના કેઈ બિંદુની આસપાસ ફરે છે, ત્યારે તેના બે છેડાનાં અંતરે તે બિંદુથી ગમે તેટલાં ઓછાં વર્ત્તાં હોય, તોપણ તે છેડા સરખાજ ખુણામાં થઈને ફરે છે. ”



અવ લીટી ક બિંદુની આસપાસ ફરે છે. જે તેનો કવ ભાગ હવે ના ખુણામાં થઈ જતાં સુધી ફેરવ્યો હોય, તો કઅ ભાગ કેટલા અંશના ખુણામાં થઈને ફરશે ?

અવ લીટી પર કહ લીટી (બંનેની લંબાઈ એકજ દિશામાં હોય એવી રીતે) પડેલી છે. કહ લીટી ક બિંદુની આસપાસ ફરીને અવ સાથે વફહ ખુણો ૨૦ અંશનો ફરે, તો અફક ખુણો કેટલા અંશનો થાય ?



ઉપલા પ્રયોગમાં હ છેડો ૪૫, ૬૦, ૭૫, ૧૧૫ અંશના ખુણામાં થઈ જતાં સુધી ફેરવ્યો હોય, તો ક છેડો કેવડા ખુણામાં થઈને ફરશે ?

ઉપલા પ્રયોગમાં અફડ ખુણા કેટલો મોટો થશે ? કફબ ખુણા કેવડો ? વફડ ખુણા ૩૮ અંશનો છે એમ ધારીને બાકીના ત્રણ ખુણા કેવડા છે તે શોધી કાઢો.

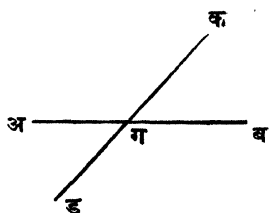
વફડ ખુણા ૧૫૦, ૯૪, ૮૫, ૧૧૩ અંશનો ધારીને ઉપલા પ્રશ્નનો ઉત્તર આપો.

ઉપલા પ્રશ્નમાં અફડ અને કફબ, તથા વફડ અને કફઅ એ ખુણાઓને સરખાવો. તમને શું જણાય આવે છે ?

એક અફબ લીટી દોરો. તેને છેદનારી ગમે તે કફડ લીટી દોરો. વફડ ખુણા કાપી કાઢો, અને તે કફઅ પર મૂકો. તેમજ અફડ ખુણા કાપી કાઢી તેને કફબ પર મૂકો. તમને શું જણાય છે ?

એક બીજીને છેદતી બે સીધી લીટીઓથી બનેલા ખુણાઓ વિષે ઉપલા પ્રયોગમાંથી કયો નિયમ નીકળે છે ? “બે લીટી એક બીજીને છેદે છે ત્યારે જે ખુણા થાય છે, તેમાંથી સામસામા ખુણા એક બીજાની બરાબર હોય છે.”

પાસેની આકૃતિમાં વગડ ખુણા 130° છે; તો અગડ ખુણા વગક ખુણા બરાબર છે, એમ બાકીના ખુણા પ્રત્યક્ષ માધ્યા સિવાય સિદ્ધ કરો.



સમાંતર લીટીઓ.

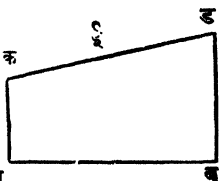
કેટલીક સમાંતર લીટીઓની અને કેટલીક અસમાંતર લીટીઓની જોડો પાટીઆ પર કાઢવી. તેમની (દરેક જોડની) એક બાજુના છેડાઓની વચ્ચેનું અંતર કેટલું છે, અને તે આગળ (બીજા છેડા તરફ) ઓધું થતું જાય છે કે વધતું જાય છે, તે જોવા છોકરાઓને કહેવું. “કેટલીકની વચ્ચેનું અંતર વધતું જાય છે”, “કેટલીકની વચ્ચેનું

અંતર ઓછું થતું જાય છે”, અને “કેટલીકની વચ્ચેનું અંતર પ્રથમ હતું તેટલુંજ રહે છે”, એમ છોકરાઓ કહેશે. જેમની વચ્ચેનું અંતર ઓછું થતું જાય છે, તે, જે બાળુએ અંતર ઓછું છે તે બાળુ તરફ વધારી હોય, તો તેમના છેડા મળશે કે? “હા.” સામી બાળુ તરફ વધારી હોય, તો તેમના છેડા મળશે કે? “ના.” જે લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર વધતું જાય છે, તે, જે દિશામાં અંતર વધતું જાય છે તે દિશામાં વધારી હોય, તો તેમના છેડા મળશે કે? “ના.” સામી દિશામાં વધારી હોય તો છેડા મળશે કે? “હા.” જે લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર કાયમ રહે છે, તે જમણી બાળુએ વધારી હોય તો એક બીજીને મળશે કે? “ના.” ડાબી બાળુએ વધારી હોય તો? “ના.” આ લીટીઓ પહેલાં કહેલી બે પ્રકારની લીટીઓથી જુદા પ્રકારની છે. એવી લીટીઓને **સમાંતર લીટીઓ** કહે છે.

સમાંતર (સમ+અંતર)=જેમની વચ્ચેનું અંતર બધે સરખું હોય છે તે. જેમની બે બાળુઓ સમાંતર હોય એવી કેટલીક વસ્તુઓનાં નામ આપો.

સમાંતર લીટીઓ વિષેની કલ્પનાનું વધારે સ્પષ્ટીકરણ.

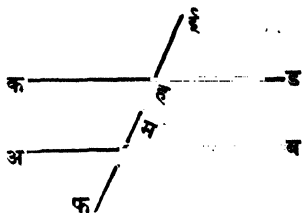
એક સીધી અથવા સળી પાટીઆ પર આડી મૂકી છે. તેથી કેટલેક અંતરે બીજી એક સીધી કાઢ સળી ઈ સ્થળે ખોણેલી ટાંકણીથી પાટીઆ સાથે જડી દીધી છે. આ સળીને પહેલાં ગમે તે સ્થિતિમાં હોવા દો. આ સ્થિતિમાં ક ને ક છેડાનું અથવા છેડાઓથી અંતર માપો. કાઢનો જે છેડો અથવા



વધારે આધો હોય, તે છેડાને અથવા પાસે લઈ જાઓ, અને તે છેડો અથવા પાસે લઈ જતી વખતે, બીજા છેડાનું અથવા જે અંતર હોય તેમાં શો ફેરફાર થાય છે, તે જુઓ. “પહેલાં જે છેડો આધો હતો તેનું અંતર જેમ જેમ ઓછું કરવામાં આવે છે, તેમ તેમ

કેટલાક ખુણાનાં નામ.

અવ,કહ લીટીઓને રૂફ
લીટી મ અને હ બિંદુમાં છેદે
છે. રૂફ લીટી વડે અવ,કહ
લીટીઓની સાથે જે ખુણા
થાય છે, તેમને નીચે પ્રમાણે
નામ આપ્યાં છે:—



∠કહમ અને ∠હમવને વ્યુત્ક્રમ (વિરુદ્ધ ખાણુએ હોય
એવા) ખુણા કહે છે.

∠હમમ અને ∠હમઅને વ્યુત્ક્રમ ખુણા કહે છે.

∠રૂફક, ∠રૂફહ, ∠ફમઅ, અને ∠ફમવને બહારના
ખુણા કહે છે (કારણ કે તે આપેલી લીટીઓની બહારની ખાણુના
ખુણા છે).

∠રૂફહ, ∠હમવને સંગત ખુણા કહે છે.

∠રૂફક, ∠હમઅને ” ” ”

∠કહમ, ∠હમઅ, ∠હમમ, ∠હમવને અંદરના ખુણા
કહે છે; કારણ કે તે આપેલી લીટીઓની અંદરની ખાણુના ખુણા
છે. એમાંથી ∠કહમ અને ∠હમઅ એ રૂફની એકજ ખાણુએ
છે, તેથી તેમને એકજ ખાણુ તરફના અંદરના ખુણા કહે છે.
તેમજ ∠હમમ અને ∠હમવ એ રૂફની એકજ ખાણુએ છે;
તેથી તેમને પણ એક ખાણુ તરફના અંદરના ખુણા કહે છે.

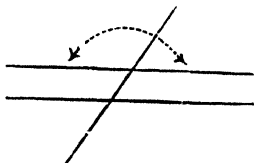
તમારી એકસર્પાઈઝ ખુકમાં દોરેલી સમાંતર લીટીઓની જુદી
જુદી ચાર જોડો લો. તેમને છેદનારી ગમે તે લીટીઓ દોરો. છેદનારી
લીટીઓને લીધે થતા વ્યુત્ક્રમ ખુણા માપો. તેમને એક બીજા સાથે
(વ્યુત્ક્રમ ખુણાની જોડમાંના એક ખુણાને બીજા સાથે) સરખાવો.
તેમને શું જણાય છે?

વ્યુત્ક્રમ ખુણાઓમાંથી એક ખુણો કાપી કાઢીને બીજા ખુણા પર મૂકો. શું દેખાતું છે? “ તે સરખા છે. ”

સમાંતર ન હોય એવી બે લીટી લો. તેમને છેદે એવી એક લીટી દોરો. આ લીટીથી થતા વ્યુત્ક્રમ ખુણા માપો, અને તેમને સરખાવો. તે સરખા છે કે? “ ના. ”

આ ઉપરથી સમાંતર લીટીઓના વ્યુત્ક્રમ ખુણા અને અસમાંતર લીટીઓના વ્યુત્ક્રમ ખુણાની વચ્ચે તમને શો તફાવત જણાય છે?

તમારી એક્સસર્સિઝ બુકમાં દોરેલી ગમે તે બે સમાંતર લીટીઓ લો. તેમને છેદનારી એક લીટી દોરો. આ સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેના આ છેદનારી લીટીની એક બાજુનો (ડાબી કે જમણી બાજુનો) કાગળનો ભાગ કાતરથી કાપી



કાઢો. આ ભાગ અર્ધા વર્તુળ જેટલો ફેરવીને (આકૃતિ જુઓ) બીજી બાજુના ભાગ પર એવી રીતે મૂકો કે વ્યુત્ક્રમ ખુણા એક બીજા પર પડે. આ ઉપરથી વ્યુત્ક્રમ ખુણા વિષે તમે શું શીખ્યા?

સમાંતર લીટીઓને છેદનારી લીટીને લીધે એક બાજુ પર જે બહારનો ખુણો થાય છે, તેને સામેના (સંગત) ખુણા સાથે સરખાવો. અસમાંતર લીટીઓ લઈને એજ પ્રયોગ કરો. શો તફાવત જણાઈ આવે છે? “ સમાંતર લીટીઓને છેદનારી લીટીને લીધે થતા ખુણા પૈકી બહારનો ખુણો તેજ બાજુના સંગત ખુણા બરાબર હોય છે. અસમાંતર લીટીઓને છેદનારી લીટીને લીધે થતા ખુણા પૈકી બહારનો ખુણો તેજ બાજુ પરના સંગત ખુણાની બરાબર હોતો નથી. ”

સમાંતર લીટીઓને છેદનારી લીટીને લીધે તે લીટીની એક બાજુએ જે અંદરના ખુણા થાય છે, તેમનો સરવાળો કરો. તે કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે? બીજી બાજુના અંદરના ખુણાઓનો સરવાળો કરો. તે કેટલો થાય છે? “ બે કાટખુણા. ”

જેમની વચ્ચેનું અંતર જમણી બાજુ તરફ ઓછું થતું જાય છે, એવી લીટીઓની જોડ લઈને, તેમને છેદનારી લીટીને લીધે જમણી બાજુએ થતા બે અંદરના ખુણા માપો, અને તેમનો સરવાળો કરો. આ સરવાળો કેટલો થાય છે ? બે કાટખુણાથી ઓછો કે વધુ ? “ઓછો.”

જેમની વચ્ચેનું અંતર જમણી તરફ વધતું જાય છે, એવી લીટીઓની જોડ લઈને, તેમને છેદનારી લીટીને લીધે જમણી તરફ થતા બે અંદરના ખુણા માપો, અને તેમનો સરવાળો કરો. તે સરવાળો બે કાટખુણાથી ઓછો થાય છે કે વધારે ? “વધારે.”

સમાંતર લીટીઓના સંબંધમાં ઉપર જે પ્રયોગો કર્યા છે, તે પરથી તેમના કયા ધર્મો જણાઈ આવે છે ?

“જે એક લીટી બે સમાંતર લીટીઓને છેદે, તે—

(૧) વ્યુત્કંભ ખુણા સરખા હોય છે;

(૨) સંગત ખુણા સરખા હોય છે;

(૩) છેદક લીટીની એક બાજુ પરના બે અંદરના ખુણા એક બીજાના ન્યૂનતાપૂરક હોય છે.”

આ ધર્મો સમાંતર લીટીઓ સિવાય બીજી લીટીઓમાં દેખાઈ આવતા નથી.

સૂચના:—નીચેની વ્યાખ્યા અને આ પ્રકરણમાં આવેલી બીજી વ્યાખ્યાઓ આ પ્રકરણ ચાલતું હોય ત્યારે વિદ્યાર્થીઓને સમજાવવી, અને પ્રકરણ પુરું થયા પછીજ તેમની પાસે મોઢે કરાવવી.

સમાંતર લીટીઓની વ્યાખ્યા:—જે લીટીઓ (એકજ સપાટીમાં* હોઈ એવી હોય છે, કે તે) કોઈ પણ બાજુએ ગમે તેટલી વધારી હોય તે છતાં પણ એક બીજાને મળતી નથી, તે સમાંતર લીટીઓ કહેવાય છે.

‘એકજ સપાટીમાં હોઈ’ આ શબ્દો શા માટે વાપર્યા છે ? એક પેન્સિલ પૂર્વપશ્ચિમ પકડી રાખી હોય, અને તે પર થોડે અંતરે

* સપાટી શબ્દનો અર્થ આગળ બીજા પ્રકરણમાં આવશે.

બીજી પેન્સિલ પહેલીને અસમાંતર છતાં દક્ષિણુદિતર પકડી રાખી હોય, તો તે પેન્સિલોથી દર્શાવાતી લીટીઓ ગમે તેટલી વધારી હોય તોપણ એક બીજીને બીલકુલ મળશે નહિ. પણ તે સમાંતર છે કે ? “ના.” આ ઉપરથી ‘એકજ સપાટીમાં’ એ શબ્દોની જરૂર સમજાય છે કે ?

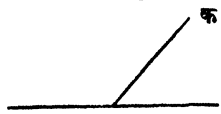
એ સમાંતર લીટીઓને છેદનારી લીટીને લીધે એક બાજુએ જે અંદરના ખુણા થાય છે, તે પૈકી એક ખુણો જે ૧૦૦°નો હોય તો બીજો ખુણો કેવડો હોવો જોઈએ ?

અંદરના ખુણામાંથી એક ખુણો જે ૮૦°નો હોય, તો બીજો ખુણો કેવડો હોય ?

અંદરના ખુણામાંથી એક ખુણો જે ૭૫°નો હોય, તો બીજો ખુણો કેવડો હોય ?

અંદરના ખુણામાંથી એક ખુણો જે ૧૪૦°નો હોય, તો બીજો ખુણો કેવડો હોય ?

આપેલા બિંદુમાંથી આપેલી લીટીને સમાંતર લીટી દોરવા વિષે.

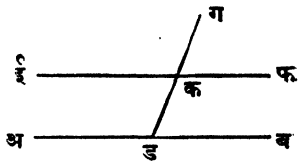
સમાંતર લીટીઓના ધર્મો વિષે જે કહેવામાં આવ્યું છે, તે ઉપરથી સમાંતર લીટીઓ દોરવાની કોઈ રીત તમને જણાઈ આવે છે કે ? ધારો કે અબ લીટીને સમાંતર લીટી ક બિંદુ-

 માંથી દોરવી છે; તો તે કેમ દોરશો ? અ કમાંથી અબ લીટીને ગમે તે એક ક બિંદુમાં મળનારી એક કડ લીટી દોરો. કડબ ખુણો માપો. કોઈ એક લીટી ક પાસે કેવડો ખુણો કરે તો તે લીટી અબને સમાંતર થાય ? “ \angle કડબ જેટલો.” કડની કઈ બાજુએ ? “ \angle કડબથી વિરુદ્ધ બાજુએ.”

ઉપલા પ્રશ્નમાં કમાં થઈને જનારી સમાંતર લીટી કાઢીએ, તો કની જમણી તરફ અંદરની બાજુએ જે ખુણો થાય તે કેવડો

હોય ? તે ખુણા દોરીને સમાંતર લીટી દોરી શકાય ? અથવા લીટી અને ક બિંદુ લઈને ઉપર બતાવ્યા પ્રમાણે કમાં થઈને જનારી સમાંતર લીટી દોરો.

એક અથવા લીટી લો. તેની ઉપલી બાજુએ એક ક બિંદુ લો. અથવામાં ગમે તે ડ બિંદુ લો.

કડ સાંધો. પછી નીચેના ત્રણ પ્રયોગ જુદી જુદી આકૃતિ દોરીને કરો:—



(૧) \angle કડબ જેવડો \angle ડકઈ લઈને ઈકફ લીટી દોરો.

(૨) \angle કડબના ન્યૂનતાપૂરક ખુણા જેવડો \angle ડકફ દોરો, અને ફકને ઈ સુધી વધારો.

(૩) ડકને ક તરફ ગ સુધી વધારો. \angle કડબ બરાબર \angle ગકફ કરો, અને ફકને ઈ સુધી વધારો.

(૨) અને (૩) એ આકૃતિઓમાં વ્યુત્ક્રમ ખુણા બરાબર છે, અને ઈફ, અથવા સમાંતર છે, એ બતાવી આપો.

બીજી રીત:—અથવા લીટી પર ત્રિકોણમાપનો કર્યું બરાબર.

પહે એવી રીતે તે

ત્રિકોણમાપ મૂકવું.

ત્રિકોણમાપની બીજી

બાજુને (એટલે

કાટખુણો કરનારી

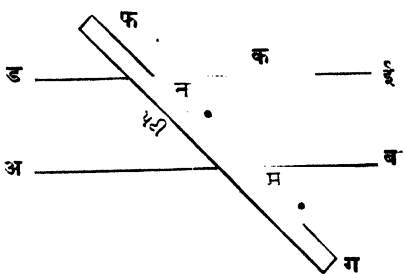
એ બાજુમાંથી એક

બાજુને) આકૃતિમાં

બતાવ્યા પ્રમાણે

પટ્ટી લગાડવી. પછી પટ્ટીને ઘાબી રાખીને પટ્ટીની કોરે કોરે

ત્રિકોણમાપને ઉપલી બાજુએ ખસેડવું. ક બિંદુ પર ત્રિકોણમાપનો



કર્ણુ આવ્યો, કે કર્ણુની કોરે કોરે ક બિંદુમાં થઈને જાય એવી લીટી દોરવી.

ધારો કે એવી રીતે ઢાંચે લીટી ક બિંદુમાં થઈને જાય એમ અબને સમાંતર દોરેલી છે, તો તે સમાંતર છે એ વાત નીચે પ્રમાણે સિદ્ધ થઈ શકે. અબ, ઢાંચે એ લીટીઓને છેદનારી કગ લીટીથી થનારા ન અને મ સંગત ખુણા સરખા છે; ઢાંચે લીટી અબને સમાંતર છે.

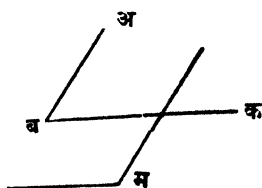
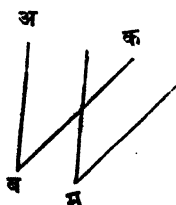
એક અબ લીટી લો. અબને સમાંતર કડ લીટી દોરો. કડને સમાંતર રૂફ લીટી દોરો. રૂફ, અબને સમાંતર છે કે ? આ ઉપરથી, જે એ લીટીઓ ત્રીજીને સમાંતર હોય છે, તેમના સમાંતરપણા વિષે શો નિયમ જણાઈ આવે છે ? “ તેઓ એક બીજીને સમાંતર હોય છે.”

એક બીજીને સમાંતર ઘણી લીટીઓ દોરવાની રીત:—

જે દિશામાં સમાંતર લીટીઓ દોરવી હોય, તે દિશામાં ત્રિકોણમાપનો એક ભુજ+ મૂકીને તેની લગોલગ લીટી દોરવી. (એક આપેલી લીટીને સમાંતર લીટી કાઢવી હોય તો તે લીટી પર ત્રિકોણમાપનો ભુજ મૂકવો.) પછી પટ્ટી કે બીજું ત્રિકોણમાપ લઈને, તેની એક બાજુ પહેલા ત્રિકોણમાપના કાટખુણાના બીજા ભુજને લગાડવી. પછી પહેલા ત્રિકોણમાપને ઉપર કે નીચે જરૂર પ્રમાણે પટ્ટીની કે બીજા ત્રિકોણમાપની કોરે કોરે ખસેડીને સમાંતર લીટીઓ દોરવી.

એક ઉભી લીટી લો. તેમાં ગમે ત્યાં ચાર પાંચ બિંદુ લો, અને તે બિંદુઓમાં થઈને જનારી સમાંતર લીટીઓ દોરો.

સમાંતર ભુજોવાળા ખુણા.



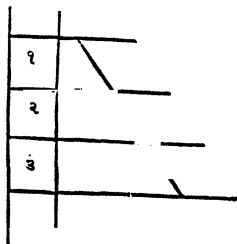
+ કાટખુણો કરનારી બે બાજુઓને ભુજ કહે છે.

એક અવક ખુણા લો. ગમે તે એક મ મિંદુ લો. મમાંથી
બઝ, બકને સમાંતર લીટીઓ દોરો. આ લીટીઓની વચ્ચેના ખુણા
માપો. તેને \angle અવક સાથે સરખાવો. તે \angle અવક જેવડો ન હોય
તો તેને \angle અવકમાં ઉમેરો, અને એનો સરવાળો કેટલો થાય
છે તે જુઓ.

આ ઉપરથી કોઈ ખુણા અને તેના ભુજોને સમાંતર હોય એવી
લીટીઓ વચ્ચેના ખુણા એ એની વચ્ચેના સંબંધ વિષે શો નિયમ
જણાઈ આવે છે ? “ આ ખુણા સરખા હોય છે અથવા ન્યૂનતાપૂરક
હોય છે. ” (ખુણા ક્યારે સરખા છે અને ક્યારે ન્યૂનતાપૂરક હોય
છે એનો ખુલાસો આગળ દ્વંદ્વ પ્રમેયની નીચે કર્યો છે.)

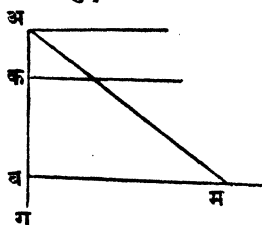
સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેના ગાળાઓ.

એક ઉભી લીટી લો. તેમાં સરખે અંતરે ત્રણ કે ચાર મિંદુઓ
લો, અને તેમાં થઈને જાય એવી સમાંતર લીટીઓ દોરો. આ બધી
સમાંતર લીટીઓને છેદે એવી બીજી ચાર પાંચ લીટીઓ દોરો. આ
લીટીઓ પૈકી પહેલી લીટીના, સમાંતર લીટીઓને લીધે, જે એ કે
ત્રણ ગાળાઓ પડે છે, તેમને એક બીજા સાથે સરખાવો. શું જણાઈ
આવે છે ? “ ગાળાઓ સરખા
છે. ” એવીજ રીતે બીજી લીટીના
ગાળાઓ સરખાવીને શું જણાય
છે તે જુઓ. “ ગાળાઓ સરખા
છે. ” ત્રીજી અને ચોથી લીટી
માંટે એવાજ પ્રયોગ કરો. (પુનઃ)
આ ઉપરથી કયો નિયમ જણાઈ



આવે છે ? “ જો ત્રણ કે ત્રણથી વધારે સમાંતર લીટીઓને
છેદનારી એક લીટીના ગાળાઓ સરખા હોય, તો તે સમાંતર
લીટીઓને છેદનારી બીજી ગમે તે લીટીના ગાળાઓ સરખા
હોય છે, ”

અગ અને અમ લીટીઓ ગમે તેવડો ખુણો કરે એમ દોરો. અગ લીટીમાં અથી થોડે અંતરે ક ખિંદુ લો; ત્યાંથી અકથી બમણે અંતરે વ ખિંદુ લો; અ, ક, વ, ખિંદુમાં થઈને જનારી સમાંતર લીટીઓ દોરો.



આ લીટીઓને લીધે અમના જે બે ગાળા પડે છે તેમને એક બીજા સાથે સરખાવો. શું જણાઈ આવે છે? ઉપલી આકૃતિમાં સમાંતર લીટીઓને છેદનારી ગમે તે લીટી દોરો. તેના સમાંતર લીટીઓને લીધે જે ગાળા પડે છે તેમને સરખાવો. શું જણાઈ આવે છે?

અગ લીટીમાં કવ અંતર અકથી ત્રણગણું લો, અને ઉપર પ્રમાણેજ પ્રયોગ કરો. આ પ્રયોગ પરથી શું સમજાય છે?

સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર.

બે સમાંતર લીટી દોરો. તે બે વચ્ચે ઓછામાં ઓછું અંતર દેખાડનારી લીટી દોરો. આ લીટી સમાંતર લીટીઓ પૈકી દરેક લીટી સાથે કેવડો ખુણો કરે છે?

આ ઉપરથી સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર (ઓછામાં ઓછું અંતર) કાઢવા વિષે શો નિયમ સમજાય છે? “સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર તેમની વચ્ચેનો લંબ છે.”

એક્સસર્સાઈઝ પુકમાંની સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર મિલિમીટરમાં કાઢો.

બે સમાંતર લીટીઓ દોરો. તેમાંથી એક પર લંબ દોરો. તે લંબને બીજી લીટીને છેદતાં સુધી લંબાવો. તે બીજી લીટી પર લંબ છે કે? “હા.” આ ઉપરથી શું સમજાય છે? “બે સમાંતર

લીટી પૈકી એક લીટી પર લખ હોય એવી લીટી બીજી લીટી પર પણ લખ હોય છે. ”

ત્રિકોણ.

વર્તુળ.

ચાકની લાકડી ખોસવાના લાકડાના કંપાસની એ અણી વચ્ચે એક કુટ અંતર રાખવું. પાટીઆ પર એક મિંદુ લઈને તેને અ નામ આપવું. આ મિંદુ પર કંપાસની તીક્ષ્ણ અણી મૂકીને ચાકની અણીથી પાટીઆ પર એક મિંદુ કાઢવું. અથી આ મિંદુનું અંતર કેટલું છે ? “ એક કુટ. ” પછી તીક્ષ્ણ અણી કાયમ રાખીને (અને અણીઓની વચ્ચેનું

અ

અંતર તેનું તેજ રાખીને) ચાકની અણી જરા (ગોળાટમાં) આગળ ખસેડીને બીજું મિંદુ કાઢવું. અથી આ મિંદુનું અંતર કેટલું છે ? “ એક કુટ. ” એજ પ્રમાણે ચાકની અણી ગોળાટમાં ખસેડીને ટપકાની લીટીથી વર્તુળ બનાવવું; અને કાઢેલાં ટપકાનું અંતર અથી સરખુંજ છે (એટલે એક કુટ છે) એ જવાબ છોકરાઓની પાસે કઢાવેલા. પછી કંપાસ ફરીથી પાટીઆ પર મૂકીને ટપકાં પર થઈ જાય એવી રીતે ચાકની અણી ફેરવીને વર્તુળ પુરું કરવું. (વર્તુળના પરિધ પરનું એકાદ મિંદુ બતાવીને) “ આનું અથી અંતર કેટલું છે ? ” “ એક કુટ. ” (પરિધ પરનું બીજું કોઈ મિંદુ દેખાડીને) આનું અંતર અથી કેટલું છે ? “ એક કુટ. ” આ લીટીમાંના કોઈ પણ મિંદુનું અંતર અથી એક કુટ છે, એ વાત પરથી વર્તુળના પરિધ પરનાં મિંદુ અને મધ્યમિંદુ વચ્ચેનાં અંતર વિષે કયો નિયમ જણાઈ આવે છે ? “ પરિધ પરનાં સર્વ મિંદુઓ મધ્યમિંદુથી સરખે અંતરે હોય છે. ” તેટલાજ અંતર પરનું (એટલે એક કુટ અંતરે હોય એવું) મિંદુ પરિધની અંદર કે બહાર હોવાનો સંભવ છે કે ? “ ના. ”

ગોળ આંકણીની આસપાસ બરાબર એક ફેરો થતા સુધી દોરો લપેટો, અને જ્યાં એક ફેરો પુરો થાય ત્યાંથી દોરો કાપી કાઢો. પછી કાપેલા દોરાનો કકડો માપો. (અથવા ગોળ આંકણીની બાબુ પર ઇંધ નિશાની કરીને તે આંકણીની એક પ્રદક્ષિણા થાય ત્યાંસુધી તે આંકણીને ફુટપટ્ટી પર ફેરવો અને ફુટપટ્ટી પરનું અંતર માપો. પછી તે આંકણીનો વ્યાસ માપો. આંકણીના વ્યાસ અને પરિધ વચ્ચે શું પ્રમાણ હોવાનું જણાઈ આવે છે ?)

ભોંય પર પૈસો મૂકી તેની આસપાસ દોરો લપેટીને ઉપર પ્રમાણે પ્રયોગ કરો.

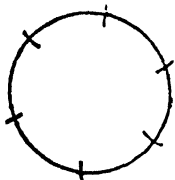
બે ઇંચ વ્યાસનું વર્તુળ કાઢો. પાણીમાં દોરો પલાળીને તેને વર્તુળના પરિધ પર મૂકી પરિધની લંબાઈ માપો. પરિધ વ્યાસથી કેટલાગણો મોટો છે તે જુઓ.

૩.૫", ૭" વ્યાસનાં વર્તુળ લઈને ઉપરોક્ત પ્રયોગ કરો. વ્યાસથી પરિધ કેટલાગણો મોટો હોય છે એ વિષે તમને શું જણાઈ આવે છે ? “૩ઠ્ઠી ગણો, અથવા વ્યાસ અને પરિધનું પ્રમાણ ૭ : ૨૨ હોય છે.”

કાગળના કકડા પર એક વર્તુળ દોરો. આ વર્તુળના પરિધ પર અં, બ, ક, ડ, ઈ, ફ, ગ, ... એ બિંદુઓ ઘણાં પાસપાસે લઈને તેમાં ટાંકણીઓ ખોસો. અ આગળ શરૂ કરીને ફરીથી અ સુધી આવી પહોંચે ત્યાં લગી ટાંકણીઓની આસપાસ દોરો લપેટો, અને તે બિંદુ આગળ દોરો કાપી કાઢો. આ દોરાની લંબાઈ લગભગ વર્તુળના પરિધ જેટલી છે, એમ જણાશે. આ લંબાઈ વર્તુળની ત્રિજ્યાથી કેટલાગણી છે ? “સવાછગણી છે.”

ઉપલા પ્રયોગ પરથી એમ જણાઈ આવશે, કે અબ અંતર જેમ જેમ ઓછું લઈએ તેમ તેમ દોરો અબ કોંસની વધારે ને વધારે પાસે થઈને જાય છે. આ પરથી એમ જણાઈ આવે છે, કે વર્તુળમાં દોરેલી ઘણી બાબુવાળી આકૃતિની બાબુઓ જો ઘણીજ નાની હોય, તો તે આકૃતિની પરિમિત લગભગ વર્તુળના પરિધ જેટલી હોય છે.

ગમે તેવું એક વર્તુળ દોરો. તે વર્તુળની ત્રિજ્યા જેટલું અંતર કંપાસની અણીઓની વચ્ચે રાખીને કંપાસની અણીઓ પરિઘ પર મૂકીને પરિઘના થાય તેટલા સરખા ભાગ કરો. કેટલા ભાગ થાય ? “ છ. ”



ત્રિજ્યા જેટલી લાંબી જ્યાઓ* વર્તુળમાં એક પુરી થાય ત્યાં બીજી શરૂ થાય એવી રીતે એક પછી એક મૂકી હોય તો તેવી જ્યાઓ એક પુરી પ્રદક્ષિણા થાય ત્યાંસુધી, એક વર્તુળમાં કેટલી કાઢી શકાય ? “ છ. ”

વર્તુળ અને ત્રિકોણ.

૨" ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ કાઢો. ૨" વ્યાસવાળું વર્તુળ કાઢો. ૨.૯" ત્રિજ્યા લઈને વર્તુળ દોરો. ૨૨ મિ. મી. ત્રિજ્યા લઈને વર્તુળ દોરો.

અ સ્થળે રાખેલી તોપનો ગોળો ચાર માઇલ સુધી જાય છે, તો તે તોપના ગોળાની મર્યાદામાં આવતા પ્રદેશની હદ દેખાડો. (સ્કેલ-૧ માઇલ = $\frac{1}{2}$ ".)

જે કિલ્લા વચ્ચે ૯ માઇલનું અંતર છે. દરેક કિલ્લા પરની તોપનો મારો છ માઇલ સુધી પહોંચે છે; તો બંને કિલ્લા પરની તોપના મારામાં જે સામાન્ય પ્રદેશ આવે છે તેની હદ દેખાડો. (સ્કેલ-૫ મિ. મી. = ૧ માઇલ.)

એક વર્તુળાકાર બાગનો વ્યાસ ૫૦ ફુટ છે. એક માળી તે બાગની કોર પર હાથમાં પાણીની નળી લઈને ઉભો છે. જો નળીમાંથી પાણી ૩૦ ફુટ આંધું ઊડી શકે, તો જ્યાં માળી ઉભો રહ્યો છે તે જગા પરથી તે બાગનો કેટલો ભાગ પલાળી શકશે, એ આકૃતિ કાઢીને બતાવો. (સ્કેલ-૧ મિ. મી. = ૧ ફુટ.)

* પરિઘ પરનાં કોઈ પણ બે બિંદુને સાંધનારી લીટીને જ્યા કહે છે.

એક બીજાથી ૧.૫" અંતરે અ અને વ બિંદુઓ હો. અથી ૧.૫" અંતરે હોય એવાં બધાં બિંદુઓની જગા એક લીટીથી બતાવો. (આ લીટી, ૧.૫" ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ થશે.) વથી ૧.૫" અંતરે હોય એવાં તમામ બિંદુઓની જગા લીટીથી બતાવો. અ ને વ એ બંને બિંદુથી ૧.૫" અંતરે કેટલાં બિંદુ છે ? “ બે. ” તેમને ક ને ઢ કહો. તેમને અ, વ સાથે સાંધો. અવ, વક, કઅ અને અવ, વઢ, ઢઅ લીટીઓની લંબાઈ કેટલી છે ?

અ ને વ એ બે બિંદુઓ એક બીજાથી ૧.૭" આંધાં છે. અથી ૨" દૂર હોય એવાં બધાં બિંદુઓની જગાઓ બતાવો. વથી ૧.૫" અંતરે હોય એવાં તમામ બિંદુઓની જગા લીટીથી દેખાડો. અથી ૨" અને વથી ૧.૫" આંધું કયું બિંદુ છે ? એવાં બિંદુઓ બધાં મળીને કેટલાં છે ? “ બે. ” તેમને ક ને ઢ કહો. અક અને વકની લંબાઈ કેટલી છે ? તેમજ અઢ અને વઢની લંબાઈ કેટલી છે ?

ઉપલા પ્રયોગ પરથી, આપેલાં બે બિંદુથી અમુક અંતરે હોય એવું બિંદુ કાઢવાની કઈ રીત જણાઈ આવે છે ? (અર્થાત્ બે બિંદુથી અમુક અંતરે હોય એવું બિંદુ કાઢવું હોય તો તે કેમ કાઢવું ?) આ બિંદુઓ સાંધવાથી જે આકૃતિ થાય છે, તેને કેટલી બાજુઓ હોય છે ? કેટલા ખુણા ?

અ, વ બિંદુઓ એક બીજાથી ૧.૨" અંતરે છે. અથી ૨" અને વથી ૧.૫" અંતરે હોય એવું ક બિંદુ શોધી કાઢો. અવ, વક, અક એ બિંદુઓ સાંધો. અવ, વક, કઅની લંબાઈ કેટલી ? અવક એ કઈ આકૃતિ છે ?

ઉપલા પ્રયોગ પરથી, જેની અવ, વક, અક બાજુઓની લંબાઈ આપેલી હોય, એવો ત્રિકોણ દોરવા વિષે કયો નિયમ નીકળે છે ?

ઉપલા પ્રયોગમાંની આકૃતિમાંના અવક અને અવઢ ત્રિકોણમાં કઈ સરખાપણું હોવાનું જણાઈ આવે છે કે ?

નીચે આપેલાં માપ ઉપરથી ત્રિકોણ કાઢો:—

અવ ૧.૪" વક ૨" કઅ ૨.૫";

.. ૨.૧" " ૧.૮" " ૩.૨";

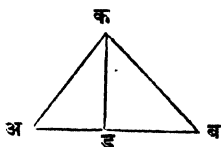
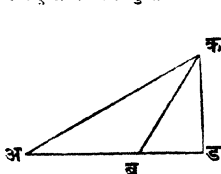
અવ	૪.૧"	વક	૪.૨"	કલ	૪.૩"
"	૪૧ મિ. મી.	"	૪૨ મિ. મી.	"	૪૩ મિ. મી.
"	૩૨	"	૧૮	"	૨૦
"	૬૮	"	૧૧૪	"	૫૮

(કેટલીક) વ્યાખ્યાઓ.

ત્રિકોણ જે બાજુ પર ઉભો છે એમ આપણે ધારીએ છીએ, તે બાજુ તેનો પાયો કહેવાય છે. અવક ત્રિકોણ અવ બાજુ પર છે એમ ધાર્યું હોય, તો અવ તેનો પાયો થાય; પણ તે વક પર ઉભો છે એમ ધાર્યું હોય તો વક તેનો પાયો થાય.



ત્રિકોણના પાયાની સામેના ખુણાને શિરોબિંદુ આગળનો ખુણો કહે છે. ત્રિકોણના શિરોબિંદુમાંથી પાયા પર દોરેલા લંબને તેની ઉંચાઈ કહે



છે. પાસેના ત્રિકોણમાં કહ, અવક ત્રિકોણની ઉંચાઈ છે.

ત્રિકોણની બાજુઓ સરખી હોય કે ન હોય, તે પરથી ત્રિકોણના કેટલા પ્રકાર થઈ શકે ?

- “ (૧) જેમની બધી બાજુઓ સરખી હોય એવા;
- (૨) જેમની ફક્ત બે બાજુઓ સરખી હોય એવા;
- (૩) જેમની કોઈ પણ બાજુઓ સરખી ન હોય એવા.”

(જેમની એકજ બાજુ સરખી હોય એવા ત્રિકોણ હોઈ શકે ? એવો કોઈ પ્રકાર છે એમ ધારવામાં શી ભૂલ થશે ?)

જે ત્રિકોણની ત્રણે બાજુઓ સરખી હોય તેને સમબાજુ ત્રિકોણ કહે છે.

જે ત્રિકોણની બે બાજુ સરખી હોય તેને સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ કહે છે.

દરેક સમબાજુ ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ હોય છે, પરંતુ દરેક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ સમબાજુ હોતો નથી.

જે ત્રિકોણની ત્રણે બાજુ અસમાન એટલે વિષમ હોય તેને વિષમબાજુ ત્રિકોણ કહે છે.

કેટલાક સમબાજુ, કેટલાક સમદ્વિબાજુ, અને કેટલાક વિષમબાજુ ત્રિકોણ, પ્રથમ વિભાજક અને પટ્ટીની મદદથી અને પછી તેમની મદદ સિવાય (એટલે એકલા હાથે) દોરો.

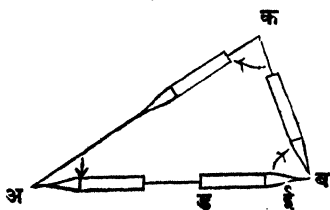
ત્રિકોણના ત્રણે ખુણાનો સરવાળો.

ગમે તેવો એક ત્રિકોણ કાઢો. તેના ત્રણે ખુણાને નિશાની કરીને તેમને ચપ્પુથી કાપી કાઢો, અને તેમને એક બીજાની લગોલગ મૂકો. તેમનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે ?

ગમે તેવો ત્રિકોણ કાઢો. તેના ત્રણે ખુણા કોણમાપકથી માપો. તેમનો સરવાળો કરો. તે કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે ? આ ઉપરથી ત્રિકોણના ત્રણે ખુણાનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે, એ વિષે શો નિયમ જણાઈ આવે છે ? “ત્રિકોણના ત્રણે ખુણાનો સરવાળો બે કાટખુણા બરાબર થાય છે.”

ત્રિકોણના અંદરના બધા ખુણા મળીને બે કાટખુણા બરાબર હોય છે, એ બતાવવા માટે નીચેનો પ્રયોગ કરવો.

અબક એક ત્રિકોણ છે એમ ધારો. હવે એક પેન્સિલ છે, અને તેની ફેંચણી બે તરફ છે. આ પેન્સિલને અબ બાજુમાં બે સુધી ખસેડો. તે બિંદુ આગળ હાથે અબક ખુણા જેટલો ફેરવીને ફેંક, બક પર પડે એમ કરો. પછી પેન્સિલને



ક તરફ ખસેડો; અને હ છેડો કને અડકે, એટલે હ છેડાને વક્ર અખુણા જેટલો ફેરવો. પછી પેન્સિલને અ તરફ ખસેડો; અને હ છેડો અને અડકે, એટલે હ છેડાને વક્ર અખુણા જેટલો ફેરવો. પેન્સિલને અબ લીટીમાં ખસેડીને પ્રથમને સ્થળે લાવો. હવે પેન્સિલની હ આણી કઈ દિશામાં છે ? “ અ તરફ. ” પહેલાં કઈ દિશામાં હતી ? “ અ તરફ. ” આ પરથી, હ આણી પ્રથમ હતી તેની વિરુદ્ધ દિશામાં ગઈ છે એમ જણાઈ આવે છે. આણીની દિશા બદલતી વખતે પેન્સિલ કેવી રીતે ફરતી ગઈ એ ધ્યાનમાં લો, અને તે પરથી હ પેન્સિલ કેટલા કાટખુણામાં થઈને ફરી તે કહો. “ તે એ કાટખુણામાં થઈને ફરી છે. ” અર્થાત્ ત્રિકોણના ત્રણ ખુણાનો સરવાળો એ કાટખુણા બરાબર છે, એમ આથી સિદ્ધ થાય છે.

પ્રશ્ન.

જે ત્રિકોણના એ ખુણા નીચે આપ્યા પ્રમાણે હોય, તો ત્રીજો ખુણો કેવડો હોવો જોઈએ તે કહો:—

૧૦૦°, ૫૦°; ૭૦°, ૪૦°; ૧૧૨°, ૧૮°; ૩૦°, ૪૦°.

જે ત્રિકોણના બન્ને ખુણા સરખા હોય, અને જેમનો ત્રીજો ખુણો નીચે આપ્યા પ્રમાણે હોય, તેમના બાકીના ખુણા કેવડા હોવા જોઈએ ?—

૪૦°, ૫૬°, ૧૦°, ૧૫°, ૮૫°.

ઉપલી સંખ્યાઓ ત્રિકોણના એ સરખા ખુણામાંનો એક ખુણો દર્શાવે છે, એમ ધારીને ઉપલા પ્રશ્નનો ઉત્તર આપવાનો પ્રયત્ન કરો.

જેના સઘળા ખુણા સરખા છે, એવા ત્રિકોણનો દરેક ખુણો કેવડો હોવો જોઈએ ?

નીચે આપેલા અંશના ખુણાવાળા ત્રિકોણ કાઢી શકાશે કે ?

(૧) ૯૦°, ૬૦°, ૩૦°. (૨) ૭૭°, ૮૪°, ૨૦°.

(૩) ૫૯°, ૬૦°, ૬૧°. (૪) ૧૩૫°, ૨૨°, ૨૨°.

(૫) ૭૩°, ૭૩°, ૩૩°, (૬) ૫૪°, ૫૪°, ૭૨°.

જે ત્રિકોણ કાઢી શકાય એવા ન હોય તેમના સંબંધમાં કારણ આપો.

જેનો ત્રિકોણ બની ન શકે, એવા ત્રણ ત્રણ ખુણાના કેટલાક સટ અથવા સમુદાય આપો.

એક સીધી લીટીને બંને છેડે કાટખુણો કરનારી લીટીઓ દોરીએ, તો તે ત્રણ લીટીઓનો ત્રિકોણ બનશે કે ?

એક સીધી લીટીના બંને છેડા આગળ પહોળો ખુણો કરનારી લીટીઓ દોરીને પહોળા ખુણાની બાજુએ ત્રિકોણ બનાવી શકાય કે ?

જેમના ત્રણ ખુણા અનુક્રમે નીચે આપેલા પ્રકારના છે, એવા ત્રિકોણ દોરવાને તમને કશું છે. એ પૈકી કયા ત્રિકોણો કાઢી શકાશે તે કહો:—

પહોળો ખુણો.	બીજો ખુણો.	ત્રીજો ખુણો.
(૧) કાટખુણો,	સાંકડો ખુણો,	સાંકડો ખુણો.
(૨) કાટખુણો,	કાટખુણો,	સાંકડો ખુણો.
(૩) સાંકડો ખુણો,	સાંકડો ખુણો,	સાંકડો ખુણો.
(૪) પહોળો ખુણો,	પહોળો ખુણો,	સાંકડો ખુણો.
(૫) પહોળો ખુણો,	કાટખુણો,	સાંકડો ખુણો.
(૬) પહોળો ખુણો,	સાંકડો ખુણો,	સાંકડો ખુણો.

વ્યાખ્યા.

ત્રિકોણના ખુણા પૈકી કેટલા ખુણા કાટખુણા અથવા પહોળા ખુણા હોઈ શકે ? “ એક ત્રિકોણમાં એકથી વધારે કાટખુણા હોઈ શકતા નથી ”; તેથી—

(૧) ત્રિકોણનો એક ખુણો કાટખુણો હોય, તો તે ત્રિકોણને કાટખુણ ત્રિકોણ કહે છે.

ત્રિકોણમાં એકથી વધારે પહોળા ખુણા હોઈ શકતા નથી, તેથી—

(૨) ત્રિકોણનો એક ખુણો પહોળો ખુણો હોય, તો તે ત્રિકોણને પહોળા ખુણ ત્રિકોણ કહે છે.

કોઈ પણ ત્રિકોણમાં ઓછામાં ઓછા કેટલા સાંકડા ખુણા હોવાનું જોઈએ ? “ એ. ”

હવે કેવા ત્રિકોણને સાંકડાખુણુ ત્રિકોણ કહેવો જોઈએ ? કોઈ પણ ત્રિકોણમાં ઓછામાં ઓછા બે સાંકડા ખુણા હોવા જોઈએ, એમ ઉપર કહ્યું છે; ત્યારે જે ત્રિકોણમાં બેજ ખુણા સાંકડા ખુણા હોય, તેને સાંકડાખુણુ ત્રિકોણ કહીએ તો ત્યાં કે ? એમ કહેવામાં શી ભૂલ થશે ? ઉપર કહેલા ત્રિકોણોના વર્ગોમાંથી કયા વર્ગના ત્રિકોણનો એ નામમાં ખોટી રીતે સમાવેશ થશે ? જે ત્રિકોણને કાટખુણુ ત્રિકોણ અથવા પહોળાખુણુ ત્રિકોણ એ બેમાંથી એકે નામ ન અપાતાં ફક્ત સાંકડાખુણુ ત્રિકોણ એજ નામ આપી શકાય, એવા ત્રિકોણમાં સાંકડા ખુણા કેટલા હોવા જોઈએ ? “ ત્રણ. ” આ પરથી સાંકડાખુણુ ત્રિકોણની વ્યાખ્યા તમે શી આપશો ?

(૩) જે ત્રિકોણના ત્રણ ખુણા સાંકડા હોય છે, તેને સાંકડાખુણુ ત્રિકોણ કહે છે.

૬૬મા અને ૬૭મા પાના પર આપેલા ત્રિકોણ જુઓ, અને તે પૈકી દરેક ત્રિકોણ, ઉપર કહેલા ત્રણ પ્રકાર પૈકી કયા પ્રકારનો છે તે કહો. એક કાટખુણુ ત્રિકોણનો એક ખુણો નીચે આપ્યા પ્રમાણે હોય, તો બાકીના ખુણા કેવડા હોય તે કહો:—

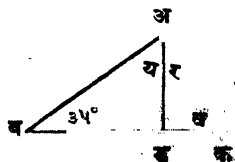
૪૦° , ૫૦° , ૬૩° , ૧૭° , ૫૮° , ૨૬° , ૩૯° વગેરે.

ઉપલા પ્રશ્ન પરથી, કાટખુણુ ત્રિકોણના સાંકડા ખુણાના સરવાળાના સંબંધમાં કયો નિયમ સમજાય છે ? “ તેમનો સરવાળો એક કાટખુણો થાય છે, એટલે કાટખુણુ ત્રિકોણમાંના સાંકડા ખુણા એક બીજાના કોટિખુણા હોય છે. ”

પાસેના અઘક ત્રિકોણમાં \angle અઘક= ૯૦° અને અડ, ઘક પર લંબ છે. જો \angle અ=૩૫° હોય,

તો \angle અ, \angle ર, \angle અ, કેવડાહેલા

જોઈએ ?



ઉપલા પ્રશ્નમાં \angle વ નીચે આપેલા અંશનો છે, એમ ધારીને
 \angle ય, \angle ર, \angle વ ખુલા કઢો:—

૩૦°, ૨૫°, ૩૭°, ૪૫°, ૫૩°.

ત્રિકોણના બહારના ખુલા.

એક અબક ત્રિકોણ લો. તેની ગમે તે બાજુ (દાખલા તરીકે
 અબક)ને ઢ સુધી વધારો. અકઢ ખુલાને અબક ત્રિકોણનો બહારનો
 ખુલો કહે છે. ત્રિકોણની બધી બાજુઓ બંને છેડા તરફ વધારી
 હોય, તો છ બહારના ખુલા થાય છે. પણ એવી રીતે જે ખુલા
 થાય છે, તેમાંથી ત્રિકોણના દરેક શિરોબિંદુ આગળ જે સામસામા
 બબ્બે ખુલા થાય છે, તે એક બીજાની બરાબર હોય છે; માટે આ
 બેડમાંના ગમે તે એક ખુલાને તે શિરોબિંદુ આગળનો બહારનો
 ખુલો ગણવાનો રિવાજ છે. તે છતાં પણ કોઈ ત્રિકોણના બહારના
 ખુલા એટલે કયા ખુલા સમજવા, એ વિષે શક ન પડે, એટલા
 માટે ત્રિકોણના બહારના ખુલા વિષે નીચેનો સંકેત નક્કી કરેલો છે:—

કોઈ ત્રિકોણની બાજુઓને એકબીજા કબે વધારી હોય, તો તે
 બાજુઓ આગળ થતા બહારના ખુલાઓને તે ત્રિકોણના બહારના
 ખુલા કહે છે. દાખલા તરીકે, ૭૪મા પ્રાના ઉપરની આકૃતિમાં અકઢ,
 અબક, અને કબગ એ અબક ત્રિકોણના બહારના ખુલા છે.

ત્રિકોણના અંદરના ત્રણ ખુલાનો સરવાળો જ્યારે બે કાટખુલા
 બરાબર થાય છે, ત્યારે તે ત્રણ પૈકી બે ખુલાનો ન્યૂનતાપૂરક ખુલો
 કયો? “ત્રીજો ખુલો.”

પાસેની આકૃતિમાં (\angle અબક + \angle અકબ)નો ન્યૂનતાપૂરક
 ખુલો કયો? (\angle અકબ + \angle કબઅ)નો
 ન્યૂનતાપૂરક ખુલો કયો?

\angle કબઅના ન્યૂનતાપૂરક ખુલો કયા?

\angle અબકના કયા? \angle અકબના કયા?



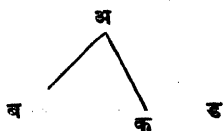
ગમે તે એક અકબ ત્રિકોણ દોરો. વક બાજુને ઢ સુધી લંબાવો.

\angle અકબ + \angle અકઢ = ૨ કાટખુણા, તો

\angle અકબનો ન્યૂનતાપૂરક ખુણો કયો ?

“ \angle અકઢ. ” આગલા પ્રયોગ પરથી

ત્રિકોણના ખુણા પૈકી કયા ખુણા



\angle અકબના ન્યૂનતાપૂરક છે એમ જણાય છે ? “ \angle કબઅ +

\angle વઅક. ” આ પરથી \angle ક.વઅ, \angle વઅક એમનો સરવાળો

અને \angle અકઢ એ એની વચ્ચે તમને શો સંબંધ જણાય છે ?

આ પરથી ત્રિકોણનો બહારનો ખુણો અને બહારના ખુણાની પાસેના અંદરના ખુણા સિવાયના બાકીના અંદરના બે ખુણાનો સરવાળો, એમની વચ્ચે તમને શો સંબંધ જણાય છે ?

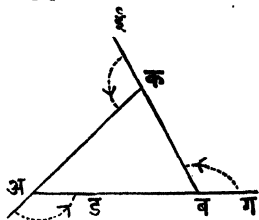
“ ત્રિકોણનો કોઈ પણ બહારનો ખુણો, તેની લગોલગ ન હોય એવા અંદરના બે ખુણાના સરવાળા બરાબર હોય છે. ”

ત્રિકોણના બહારના ખુણાઓનો સરવાળો.

ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓ એક તરફથી વધારી હોય, તો જે બહારના ખુણા થાય છે તે માપો, અથવા તેમને કાપી કાઢીને પાસપાસે મૂકો, અને તેમનો સરવાળો કરો. તે કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે ? “ચાર.”

ત્રિકોણમાંના દરેક ખુણો અને તેની પાસેનો બહારનો ખુણો એ એનો સરવાળો કેટલો છે ? “બે કાટખુણા.” એ પ્રમાણે ત્રિકોણની અંદરના ત્રણ ખુણા અને તેમની પાસેના બહારના ત્રણ ખુણા. એ બધાનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થશે ? “છ.” ત્રિકોણના અંદરના ત્રણ ખુણા મળીને જ્યારે બે કાટખુણા બરાબર હોય છે, ત્યારે આ પરથી બહારના ત્રણ ખુણાનો સરવાળો કેટલો હોવો જોઈએ, એ વિશે તમે કંઈ અનુમાન કરી શકો છો ? “એ સરવાળો ચાર કાટખુણા બરાબર હોવો જોઈએ.”

ત્રિકોણના બહારના ખુણા ચાર કાટખુણા બરાબર હોય છે, એ સિદ્ધ કરવા માટે નીચેનો પ્રયોગ કરવો. ધારો કે અબ,બક,અક એ ત્રણ રસ્તાથી એક ત્રિકોણ બને છે. ઢ સ્થળથી એક ગાડી બ તરફ જવા નીકળે છે. આ ગાડી બ પાસે આવશે, એટલે બક રસ્તે જવા માટે તેને પોતાનું મોદું ટપકાંથી દેખાડેલા બ ખુણા જેટલું ફેરવવું પડશે. ગાડી ક પાસે જશે ત્યારે ટપકાંથી દેખાડેલા ક ખુણા જેટલું તેને પોતાનું મોદું ફેરવવું પડશે. ગાડી કઅ રસ્તે અ પાસે ગયા પછી ત્યાં તેને ટપકાંથી દર્શાવેલા અ ખુણા જેટલું મોં ફેરવવું પડશે. હવે જો ગાડી સીધી આગળ જશે તો તે ઢ બિંદુ પાસે જઈ પહોંચશે.



ધારો કે અબ લીટી બરાબર પૂર્વપશ્ચિમ છે. આ પરથી સ્પષ્ટ જણાય છે, કે ગાડી પ્રથમ નીકળી ત્યારે તેનું મોં પૂર્વ તરફ હતું તે બ પાસે ગઈ ત્યારે તેનું મોં ઉત્તર તરફ ફર્યું. તે ક પાસે ગઈ ત્યારે.....વગેરે. એ પ્રમાણે તેનું મોં ધીમે ધીમે ઉત્તર, પશ્ચિમ, દક્ષિણ, એ દિશા તરફ ફર્યું, અને આખરે પૂર્વ તરફ આવ્યું. આ ઉપરથી ગાડીના મોંએ એક પુરી પ્રદક્ષિણા કર્યા જેવું થાય છે. પૂર્ણ પ્રદક્ષિણા કરી એટલે ચાર કાટખુણામાં થઈને ફર્યા જેવું થાય છે (આ ઘડિઆળના કાંટાની મદદથી બતાવી શકાશે), માટે ગાડીનું મોં ચાર કાટખુણામાં થઈને ફર્યું છે, એમ માનવાને અડચણ નથી. ગાડીનું મોં જે ખુણામાં થઈને ફર્યું, તે ખુણા તો અબક ત્રિકોણના બહારના ખુણા છે. અબક ત્રિકોણ ગમે તે પ્રકારનો લીધો હોય, તોપણ ઉપર પ્રમાણેજ પરિણામ આવે છે. આ ઉપરથી ત્રિકોણના બહારના બધા ખુણા મળીને ચાર કાટખુણા બરાબર હોય છે, એ સિદ્ધ થાય છે.

બહુકોણાકૃતિના બહારના ખુણાઓનો સરવાળો.

વ્યાખ્યા—ચારથી વધારે સીધી લીટીઓ વડે જેની હદ બંધાર્ધ હોય એવી કોઈ પણ આકૃતિને બહુકોણાકૃતિ કહે છે.

ચાર સીધી લીટીથી જેની હદ બંધાર્ધ હોય એવી આકૃતિને ચતુષ્કોણ કે ચોખુણું કહે છે.

પાંચ સીધી લીટીથી ઘેરાએલી આકૃતિને પંચકોણ કહે છે.

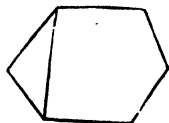
છ સીધી લીટીથી ઘેરાએલી આકૃતિને ષટ્કોણ કહે છે.



ચતુષ્કોણ.



પંચકોણ.



ષટ્કોણ.

સાત સીધી લીટીથી ઘેરાએલી આકૃતિને સપ્તકોણ કહે છે.

આઠ સીધી લીટીથી ઘેરાએલી આકૃતિને અષ્ટકોણ કહે છે.

ગમે તેવો એક ચતુષ્કોણ લો. તેની બધી બાજુઓ એકજ ક્રમે વધારો. એમ કરવાથી થએલા બધા બહારના ખુણા કાપીને અથવા કોણમાપક વડે માપીને તેમનો સરવાળો કરો. તે કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે ? “ ચાર. ”

એજ પ્રમાણે પંચકોણ, ષટ્કોણ, સપ્તકોણ, અષ્ટકોણ વગેરે આકૃતિઓ લઈને તેમના સંબંધમાં પ્રયોગ કરો. તેમના બહારના ખુણાનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થાય છે, એ વિષે તમને કોઈ નિયમ જણાઈ આવે છે ? “ આ સર્વ આકૃતિઓના બહારના ખુણાઓનો સરવાળો ચાર કાટખુણા બરાબર થાય છે. ”

૭૪મા પાના પરના ત્રિકોણના સંબંધમાં કરેલા પ્રયોગ જેવો પ્રયોગ કરીને ચતુષ્કોણ, પંચકોણ, ષટ્કોણ વગેરેના બધા બહારના ખુણાઓનો સરવાળો ચાર કાટખુણા બરાબર થાય છે એ બતાવો.

બહુકોણાકૃતિના અંદરના ખુણાઓનો સરવાળો.

પહેલી રીત—ગમે તેવો એક ચતુષ્કોણ કાઢો. તેની બાજુઓ

એકજ ક્રમે વધારો. એક બાજુ વધારવાથી જે બહારનો ખુણો થાય છે, તે અને તેની પાસેનો આકૃતિનો અંદરનો ખુણો, એ બેનો સરવાળો કેટલો થાય છે ? “ બે કાટખુણા. ” એક બાજુ વધારવાથી જે બે ખુણા થાય છે, તેમનો સરવાળો જ્યારે બે કાટખુણા બરાબર થાય છે, ત્યારે ચતુષ્કોણની બધી બાજુઓ વધારવાથી બનેલા બહારના અને અંદરના બધા ખુણાઓનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર થશે ? “ આકૃતિને જેટલી બાજુઓ છે તેટલીના બમણા કાટખુણા બરાબર. ” તેમાંથી બહારના ખુણાઓનો સરવાળો બાદ કરો. બાદબાકી રહી તે શાનો સરવાળો આવ્યો ? “ અંદરના ખુણાઓનો. ” તે કેટલો છે ? “ ચાર કાટખુણા. ”

એજ પ્રમાણે પંચકોણ, પટ્ટકોણ વગેરેના સંબંધમાં પ્રયોગ કરો.

પંચકોણના અંદરના ખુણાઓનો સરવાળો કેટલો ?

$$(5 \times 2 = 10; 10 - 4 = 6)$$

પટ્ટકોણના અંદરના ખુણાઓનો સરવાળો કેટલો ?

$$(6 \times 2 = 12; 12 - 4 = 8)$$

સપ્તકોણના અંદરના ખુણાઓનો સરવાળો કેટલો ?

$$(7 \times 2 = 14, 14 - 4 = 10)$$

પંદર બાજુવાળી આકૃતિના અંદરના ખુણાઓનો સરવાળો.....

.....વગેરે.

આ પરથી ગમે તે બહુકોણાકૃતિના અંદરના ખુણાઓના સરવાળા માટે શો નિયમ નીકળે છે ? “ બાજુની બમણાઈ કરી તેમાંથી ચાર બાદ કરવા; બાદબાકી આવે તેટલા કાટખુણા સમજવા. ”

કોઈ પણ બહુકોણાકૃતિના અંદરના ખુણાઓનો સરવાળો કેટલા કાટખુણા બરાબર છે એ કાઢવાની બીજી રીત—

કોઈ પણ આકૃતિનો પહેલો અને ત્રીજો એ ખુણા સાંધવા, અને નીચેની રીતે ખુણાઓનો સરવાળો કરવો.

ચતુષ્કોણ=૨ ત્રિકોણ; ખુણાનો સરવાળો = ૨+૨કાટખુણા=૪ કાટખુણા.

પંચકોણ=ત્રિકોણ+ચતુષ્કોણ; ખુણાનો સરવાળો = ૨+૪કાટખુણા= ૬ કાટખુણા.

ષટ્કોણ=ત્રિકોણ+પંચકોણ; ખુણાઓનો સરવાળો = ૨+૬કાટખુણા = ૮ કાટખુણા.

સપ્તકોણ=ત્રિકોણ+ષટ્કોણ; ખુણાઓનો સરવાળો = ૨+૮કાટખુણા = ૧૦ કાટખુણા.

ત્રીજી રીત—ત્રિકોણની અંદરના બધા ખુણા મળીને એ કાટખુણા બરાબર હોય છે એ સિદ્ધ કરવા માટે પહેલાં જે પેન્સિલનો પ્રયોગ કર્યો છે, તે ચતુષ્કોણ, પંચકોણ, ષટ્કોણ, સપ્તકોણ વગેરે આકૃતિઓના સંબંધમાં કરો; અને પેન્સિલની અણીની પ્રદક્ષિણા કેટલી થાય છે તે જુઓ. આ પરથી બહુકોણાકૃતિના ખુણાના સરવાળાના સંબંધમાં ઉપર જે નિયમ આપ્યો છે તે સિદ્ધ થશે.

ચોથી રીત—આપેલી (જે બાજુની) બહુકોણાકૃતિની અંદર એક અ બિંદુ લો. આ બિંદુમાંથી બહુકોણાકૃતિનાં શિરોબિંદુઓ સુધી લીટીઓ દોરો. એટલે બહુકોણાકૃતિને જેટલી બાજુ છે તેટલા (એટલે જ) ત્રિકોણ થશે. તે ત્રિકોણોના ખુણાનો સરવાળો=જે \times ૨કાટખુણા. તેમાંથી અ બિંદુ પાસેના ખુણા = ૪ કાટખુણા. માટે બહુકોણાકૃતિના અંદરના ખુણાનો સરવાળો=(જે \times ૨)-૪ કાટખુણા છે.

પ્રશ્ન.

અવકાશ ચતુષ્કોણના \angle અ, \angle બ, \angle ક, અનુક્રમે ૪૫, ૫૫, ને ૧૦૦; ૧૦૦, ૫૦, ને ૧૧૦; તથા ૧૨૦, ૧૦૦, ને ૧૨૦; } અંશના છે, તો \angle ડ કેટલા અંશનો ?

એક ચતુષ્કોણના બે ખુણા ૧૦૦° અને ૪૦° છે, અને બાકીના ખુણા સરખા છે; તો તે કેટલા કેટલા અંશના છે ?

ઉપલા પ્રશ્નમાં પહેલા બે ખુણા અનુક્રમે 43° અને 27° , 40° અને 10° , 110° અને 21° ધારીને ઉત્તર આપો.

નિયમિત+ પંચકોણનો દરેક ખુણો કેવડો હોય છે ?

નિયમિત ષટ્કોણનો કેવડો ? નિયમિત સપ્તકોણનો કેવડો ?

નિયમિત અષ્ટકોણનો કેવડો ?

નિયમિત પંચકોણ, ષટ્કોણ, અષ્ટકોણ, અને દશકોણનો બહારનો દરેક ખુણો કેટલા અંશનો હોય છે ?

એક ચતુષ્કોણના પાસપાસેના બે ખુણાનો સરવાળો 140° છે, તો બાકીના બે ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓની વચ્ચેના ખુણો કેવડો છે ?

એક પંચકોણના ચાર ખુણા સરખા છે, અને પાંચમો ખુણો બાકીના દરેક ખુણાથી અર્ધો છે; તો તે ખુણો કેટલા અંશનો હોવો જોઈએ ?

અબકઢઈફ ષટ્કોણમાંના અ,ક, અને ઈ ખુણા સરખા છે, અને તેમાંના દરેક ખુણો બ,ઢ, કે ફ ખુણાથી બમણો છે (અર્થાત્ બ, ઢ, અને ફ એક બીજાની બરાબર છે); તો અ ખુણો કેવડો છે ?

એક બહુકોણાકૃતિનો દરેક ખુણો $1\frac{1}{3}$ કાટખુણા બરાબર છે, તો તે આકૃતિને બાજુઓ કેટલી ? (બહારનો ખુણો કેવડો છે તે નક્કી કરી તે ઉપરથી બાજુઓની સંખ્યા નક્કી કરો.)

ત્રિકોણોની એકરૂપતા.*

(ત્રિકોણ એકરૂપ સિદ્ધ કરવા માટે કઈ શરતો જરૂરની છે એ વિષે.)

અબ અને ઢઈ બે સરખી લીટીઓ લો. અબના બ બિંદુ પાસે ગમે તેટલો મોટો \angle અબક કરો. \angle ઢઈફ, \angle અબક જેવડો

+ જે આકૃતિની બધી બાજુઓ સરખી અને બધા ખુણા સરખા હોય તેને નિયમિત આકૃતિ કહે છે.

* એકરૂપ એટલે બધી બાજતમાં સરખા. બધી બાજતો એટલે ખુણા, બાજુઓ, અને કેન્દ્રકોણ.

કરો. વક ગમે તેટલો લાંબી લો. તેટલીજ લાંબી રૂફ લો. કમ, ફહ સાંધો. અવ, ડઈ પર અને વક, રૂફ પર પડે એવી રીતે અવક ત્રિકોણ ડઈફ ત્રિકોણ પર મૂકો. અને ત્રિકોણ એકરૂપ છે કે? “છે.” (પુ૦). આ પરથી ત્રિકોણોની એકરૂપતા વિષે કયો સામાન્ય નિયમ નીકળે છે?

“એક ત્રિકોણની બે બાજુ અને તેમની વચ્ચેના ખુણા અનુક્રમે બીજાની બે બાજુ અને તેમની વચ્ચેના ખુણાની બરાબર હોય, તો તે બે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.”

અવ જેવડી ડઈ લીટી લો. \angle અવક, \angle દઅક ગમે તેટલા મોટા ખુણા યદ્યપિ અવક ત્રિકોણ પુરો કરો. \angle અદક, \angle વઅક જેવડા અનુક્રમે \angle ડઈફ, \angle ઈડફ કરો. અવ, ડઈ પર અને વક, રૂફ પર પડે એવી રીતે અવક ત્રિકોણ ડઈફ ત્રિકોણ પર મૂકો. (પુ૦). તે બે ત્રિકોણ એકરૂપ છે કે? “છે.” આ ઉપરથી તમે કયો સામાન્ય નિયમ શીખ્યા?

“એક ત્રિકોણની એક બાજુ અને તેના છેડાની પાસેના બે ખુણા અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણની એક બાજુ અને તેના છેડાની પાસેના બે ખુણાની બરાબર હોય, તો તે બે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.”

એક ગમે તેવો અવક ત્રિકોણ દોરો. ડઈ બાજુ અવ જેવડી દોરો. ડઈફ ખુણા અવક ખુણા જેવડો કરો. અવક ખુણા જેવડો કાગળનો કડકો કાપી કાઢો. આ ખુણા રૂફને લગાડીને એવી લીટી દોરો, કે તે રૂફની સાથે \angle અવક જેવડો ખુણો કરે. એ લીટી હમાં થઈને જશે. એવી રીતે ડઈફ ત્રિકોણ દોર્યા પછી અવ, ડઈ પર અને વક, રૂફ પર પડે એવી રીતે અવક ત્રિકોણ ડઈફ ત્રિકોણ પર મૂકો. અને ત્રિકોણ એકરૂપ છે કે? “છે.” (પુ૦). આ ઉપરથી તમે કયો સામાન્ય નિયમ શીખ્યા?

“એક ત્રિકોણના બે ખુણા અને તેમાંના એકની સામેની બાજુ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણના તેમને મળતા ભાગોની

(એટલે બીજના બે ખુણા અને પહેલા ત્રિકોણના બે ખુણાની સામેની બાજુ લીધી છે તે ખુણાની બરાબર બીજ ત્રિકોણના બે ખુણા છે તેની સામેની બાજુની) બરાબર હોય તો તે બે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે”

ઉપલા બધા પ્રયોગો પરથી, બે ત્રિકોણ એકરૂપ થવા માટે એક ત્રિકોણની ત્રણ બાજુ અને ત્રણ ખુણા એ પૈકી ઓછામાં ઓછા કેટલા ભાગ મળતા આવવાજ જોઈએ, તે કહો. “ત્રણ.” કયા ત્રણ? (૧) “બે બાજુઓ અને તેમની વચ્ચેનો ખુણો; (૨) એક બાજુ અને બે ખુણા.”

ત્રિકોણમાં સરખી બાજુની સામેના ખુણા અને સરખા ખુણાની સામેની બાજુઓ.

બે બાજુ સરખી લંબાઈની અને ત્રીજી બાજુ જરા નાની કે મોટી લઈને એક ત્રિકોણ કરો. સરખી બાજુ એક બીજી પર પડે એવી રીતે ત્રિકોણ વાળો; એટલે સરખી બાજુની સામેના ખુણા એક બીજા પર બરાબર આવી રહેશે. (પુઠ). આ ઉપરથી સમદ્વિ-બાજુ ત્રિકોણમાંના સરખી બાજુઓની સામેના ખુણા સરખા હોય છે, એમ જણાઈ આવશે. સરખી બાજુઓની સામેના ખુણા કોણમાપક વડે માપો, અને તેમને સરખાવો. તમને શું જણાય છે? “તે સરખા છે.” આ ઉપરથી ત્રિકોણમાંની સરખી બાજુની સામેના ખુણા વિષે તમને કયો નિયમ મળે છે? “સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણમાં સરખી બાજુઓની સામેના ખુણા સરખા હોય છે.”

એક સમબાજુ ત્રિકોણ દોરો. તેના ખુણા પર નિશાની કરો અને તે કાપી કાઢો. તેમને એક બીજા જોડે સરખાવો. આ ખુણા વિષે તમને શું જણાઈ આવે છે? “દરેક ખુણો ૬૦°નો છે.”

આ ઉપરથી સમબાજુ ત્રિકોણના ખુણા વિષે તમને કયો નિયમ મળી આવે છે? “સમબાજુ ત્રિકોણના બધા ખુણા સરખા હોય છે, અને દરેક ખુણો ૬૦°નો હોય છે.”

એક ગમે તેટલી લાંબી અથવા લીટી હો. \angle અથવા ગમે તેવડો સાંકડો ખુલ્લો હો. \angle અથવા જેવડો \angle અથવા કરો. અથવા અને અથવા માપો. આ પ્રયોગ ત્રણ ચાર વખતે જુદી જુદી રીતે કરો. ત્રિકોણના બે સરખા ખુણાઓની સામેની બાજુઓ કેવી હોય છે, એ વિષે તમને શું સમજાય છે?

“ત્રિકોણમાંના સરખા ખુણાની સામેની બાજુઓ સરખી હોય છે.”

અથવા=૨", \angle અથવા=૬૦°, અને \angle અથવા=૬૦° લઈને ત્રિકોણ પુરો કરો. અથવા, અથવા માપો. તેમની લંબાઈ અથવા સાથે સરખાવો. \angle અથવા કેવડો છે? (પુ). અથવા=૧", \angle અથવા=૬૦° અને \angle અથવા=૬૦° લઈને ત્રિકોણ પુરો કરો. અથવા, અથવા માપો. તેમની લંબાઈને અથવા જેવડે સરખાવો. \angle અથવા કેવડો છે? આ ઉપરથી, જે ત્રિકોણના બે ખુણા ૬૦, ૬૦ અંશના હોય છે, તે વિષે તમને કયો નિયમ મળી આવે છે? “તેના ત્રીજા ખુણા ૬૦ના હોય છે અને તેની બંધી બાજુઓ સરખી હોય છે.” સમજાવું ત્રિકોણને વાળીને તેના બે સરખા ભાગ કરો. એમાંના દરેક ભાગ કાટખુણ ત્રિકોણ છે, અને તેના બે સાંકડા ખુણા અનુક્રમે ૩૦° અને ૬૦°ના છે, એમ જણાઈ આવશે. આ ત્રિકોણમાં ૩૦ના ખુણાની સામેની બાજુ કર્ણથી અર્ધી હોય છે.

(૧) અથવા=૨", \angle અથવા=૯૦°, \angle અથવા=૬૦°

(૨) અથવા=૪", \angle અથવા=૯૦°, \angle અથવા=૬૦°

(૩) અથવા=૨.૫", \angle અથવા=૯૦°, \angle અથવા=૬૦°

લઈને ત્રિકોણ કરો. અથવા કેટલા ઈંચ છે? અથવાની સાથે અથવા સરખાવો, અને આ ઉપરથી કાટખુણ ત્રિકોણના સાંકડા ખુણા ૬૦° અને ૩૦°ના હોય, તો ૯૦° અને ૩૦°ના ખુણાની સામેની બાજુઓ શા પ્રમાણમાં હોય છે, એ વિષે જે નિયમ સમજાતો હોય તે કહો.

“જે કાટખુણ ત્રિકોણમાંના એક સાંકડો ખુણો ૩૦ના હોય, તો તે ખુણાની સામેની બાજુ કર્ણથી અર્ધી હોય છે.”

એકરૂપ ત્રિકોણોનાં બીજાં લક્ષણ.

૧", ૨", ૨.૨"ની બાજુઓ લઈને ત્રિકોણ કરો. એજ બાજુઓ (એટલે એટલીજ લાંબી બાજુઓ) લઈને બીજો ત્રિકોણ કરો. આ ત્રિકોણ પહેલા ત્રિકોણ પર, સરખી બાજુઓ એક બીજી પર પડે એવી રીતે મૂકી જુઓ. આ બે ત્રિકોણોમાં કોઈ પણ બાજુઓ તફાવત કે અસમાનપણું છે કે ? ગમે તેવડી બાજુઓ લઈને એક ત્રિકોણ કરો. તેજ બાજુઓ ગમે તે ક્રમે લઈને બીજો ત્રિકોણ કરો. આ ત્રિકોણ પહેલા ત્રિકોણ પર એવી રીતે મૂકવાનો પ્રયત્ન કરો, કે તે નીચેના ત્રિકોણ પર બરાબર આવે રહે. એવી રીતે ત્રિકોણ મૂકી શકાય છે કે ? જેમની બાજુઓ અનુક્રમે સરખી હોય એવા ત્રિકોણોના સંબંધમાં ઉપલા પ્રયોગ પરથી તમને કયો નિયમ મળી આવે છે ?

“એક ત્રિકોણની ત્રણ બાજુ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓની બરાબર હોય, તો તે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.”

જેમાં \angle અબક કાટખુણો હોય એવો એક ગમે તે અબક કાટખુણ ત્રિકોણ લો. ડર્ફ કાટખુણો દોરો. ફમાંથી બક બરાબર ફર્ગે ભાગ કાપી કાઢો. ગ મધ્યબિંદુ ધારીને કઝ ત્રિજ્યાએ વર્તુળ દોરો. ધારો કે તે ફિંડને હ બિંદુમાં છેદે છે. ગહ સાંધો.

અબક અને હર્ફ આ કાટખુણ ત્રિકોણોમાં રચના પ્રમાણે અક કર્ણ=હક કર્ણ, અને બક=ફક બાજુ છે.

\angle અબક, \angle ફર્ફ માપો અને તેમને સરખાવો. \angle અકબ, \angle હર્ફ માપો અને તેમને સરખાવો. અબ, હર્ફ માપો અને તેમને સરખાવો. સરખામણી પરથી શું જણાઈ આવે છે ?

જેમનાં કર્ણ અને ફક્ત એકેક બાજુ સરખાં હોય, એવા કાટખુણ ત્રિકોણોની જોડો લઈને ઉપલો પ્રયોગ અનેક વાર કરો. આ ઉપરથી તમને કયો નિયમ જણાઈ આવે છે ?

“જો એક કાટખુણ ત્રિકોણનો કર્ણ અને એક બાજુ બીજા કાટખુણ ત્રિકોણના કર્ણ અને એક બાજુની અનુક્રમે

અરાબર હોય, તો તે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.”

ત્રિકોણમાંના ખુણા અને બાજુઓના નાનામોટાપણના તેમની સામેની બાજુઓ અને ખુણાઓના નાનામોટાપણ સાથે સંબંધ.

વિષમ બાજુઓવાળો એક ત્રિકોણ દોરો. નાની બાજુની સામેના ખુણો કાપી કાઢો. તેને મોટી બાજુની સામેના ખુણા પર મૂકી જુઓ, અને ઘેને સરખાવો. તમને ક્યો ખુણો મોટો જણાય છે ? “મોટી બાજુની સામેનો.” બીજો વિષમબાજુ ત્રિકોણ કરો, તેની નાની બાજુની સામેના ખુણો કોણમાપકથી માપો. પછી મોટી બાજુની સામેના ખુણો કોણમાપકથી માપો. તમને શું જણાય છે ? (પુ. ૦). ત્રિકોણની નાની મોટી બાજુઓની સામેના ખુણા વિષે ક્યો સામાન્ય નિયમ ઉપલા પ્રયોગ પરથી જણાઈ આવે છે ?

“ત્રિકોણની બે નાની મોટી બાજુઓમાંથી જે મોટી હોય છે, તેની સામેના ખુણો નાની બાજુની સામેના ખુણાથી મોટો હોય છે.”

અब ગમે તેટલી લાંબી લો. અबક ગમે તેવડો સાંકડો ખુણો લો. \angle અबકથી મોટો \angle बअक લો. અક, बक માપો. મોટા ખુણાની સામેની બાજુ મોટી છે, કે નાના ખુણાની સામેની ? અब ગમે તેટલી લાંબી લો. અबક ખુણો ગમે તેવડો લો. \angle बअक, \angle अबकથી નાનો લઈને ત્રિકોણ પુરો કરો. અક, बक માપો. મોટા ખુણાની સામેની બાજુ મોટી છે, કે નાના ખુણાની સામેની ? આ ઉપરથી તમને ક્યો સામાન્ય નિયમ સમજાય છે ?

“ત્રિકોણના એક ખુણો બીજા ખુણાથી મોટો હોય, તો મોટા ખુણાની સામેની બાજુ નાના ખુણાની સામેની બાજુથી મોટી હોય છે.”

	પહોળાબુણ ત્રિકોણ.	સાંકડાબુણ ત્રિકોણ.	કાટબુણ ત્રિકોણ.
સમબાણુ ત્રિકોણ.			
સમઠિબાણુ ત્રિકોણ.			
વિષમબાણુ ત્રિકોણ.			

ઉપર ત્રિકોણના જુદા જુદા પ્રકાર એક નીચે એક આપ્યા છે, અને તેમની આગળ ખાનાં પાડીને, તે ખાનાં કયા ધર્મ દર્શાવનારાં છે તે, તે ખાનાંની ઉપલી બાણુએ લખ્યું છે. મથાળે જણાવેલા ધર્મ જે ત્રિકોણને પુરેપુરા લાગુ પડતા હોય, તે ત્રિકોણોની સામેના તે ધર્મ દર્શાવનાર ખાનામાં ‘ હા ’ એમ લખેા; અને તે ધર્મ જે ત્રિકોણને કદાચ લાગુ પડે એમ તમને લાગતું હોય તેમની સામેના તે ધર્મ દર્શાવનારા ખાનામાં “ હોઈ શકે ” એમ લખેા.

ત્રિકોણની એક બાણુનો, બીજી બાણુએના સરવાળા તથા બાદબાકી સાથેનો સંબંધ.

| | | |
ફ ડ અ વ

એક અવ લીટી લો. તેને અ તરફ ફ સુધી લંબાવો. અફમાં ડ બિંદુ લો. અ મધ્યબિંદુ અને અડ ત્રિજ્યા લઈને વર્તુળ દોરો. વ મધ્યબિંદુ અને વઅ+અડ (=વડ) કરતાં મોટી (દાખલા તરીકે વફ) ત્રિજ્યા લઈને વર્તુળ દોરો. આ વર્તુળ પહેલા વર્તુળને છેદે છે કે? “ના,” શા માટે? “વફ ત્રિજ્યા વઅ+અડ કરતાં વધારે છે તેથી.” આ વર્તુળ પહેલા વર્તુળને છેદે એમ કરવું હોય તો તેની ત્રિજ્યા કેવડી લેવી જોઈએ? “વડ કરતાં નાની.” (પુ૦) વડ કરતાં નાની ત્રિજ્યા લઈને વર્તુળ દોરો. ધારો કે તે વર્તુળ પહેલાને ગ બિંદુમાં છેદે છે. હવે ગ બિંદુ અ ને વ સાથે સાંધવાથી જે ત્રિકોણ થાય છે તેમાં અવ તો પાયોજ છે, અને ગઅ, અડ

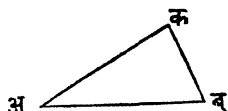
અરોઅર છે, અને ગજ, અબ+અડના સરવાળા કરતાં નાની છે. આ પરથી માલમ પડશે કે જે ત્રીજી લીટી અબ+અડના સરવાળા કરતાં ઓછી હોય, તોજ બે વર્તુળો એક બીજાને છેદી શકે છે, એટલે આપેલી બાબુઓવાળો ત્રિકોણ બની શકે છે. આ ઉપરથી, જેની બે બાબુઓના સરવાળા કરતાં ત્રીજી બાબુ મોટી હોય એવો ત્રિકોણ દોરી શકાય કે કેમ, એ વિષે શા નિયમ નીચે છે?

અબ=૩", બક=૨", અને કઅ=૮" લઈને તમે ત્રિકોણ દોરી શકશો? એબ=૩", બક=૨", અને કઅ=૧" લઈને ત્રિકોણ દોરી શકશો કે? “ના.” શા માટે નહિ? આકૃતિ દોરવાનો પ્રયત્ન કરો. ત્રિકોણ બની શકે એટલા માટે કઅની લંબાઈ ઓછામાં ઓછી કેટલી લેવી જોઈએ?

પાસેની આકૃતિમાં અ અને બ બિંદુઓની વચ્ચે કેટલું અંતર છે? અથી બ સુધી અબ સીધી લીટી દોરવાને બદલે અકબ જેવી વાંકી લીટી દોરી હોય, તો તેની લંબાઈ અથવા

વધારે થશે કે ઓછી? “વધારે;

કારણ કે અકબ વાંકી છે,” બ અને



અ વચ્ચેનું અંતર માપો. એ બે બિંદુઓ વચ્ચે અકબ જેવી લીટી દોરી હોય, તો તે અકથી નાની થશે કે મોટી? “મોટી; કારણ કે અક સીધી લીટી છે, અને અકબ વાંકી લીટી છે.” એજ પ્રમાણે ક અને અ વચ્ચે અંતર કેટલું છે? કથી અ સુધી કઅ સીધી લીટી ન દોરતાં કબઅ જેવી વાંકી લીટી દોરી હોય તો તેની લંબાઈ કઅથી વધારે થશે કે ઓછી? “વધારે; કારણ કે કબઅ વાંકી લીટી છે.” ત્રિકોણની કોઈ પણ એક બાબુ અને બીજી બે બાબુઓનો સરવાળો, એ બેમાં કોની લંબાઈ વધારે હોય છે? આ ઉપરથી ત્રિકોણની બે બાબુનો સરવાળો અને ત્રીજી બાબુ એમની વચ્ચે શા સંબંધ જણાય છે?

“ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાબુઓનો સરવાળો ત્રીજીથી વધારે હોય છે.”

ત્રિકોણની એક બાજુ ૪" અને બીજી ૨" હોય તો ત્રીજી બાજુની લંબાઈ ઓછામાં ઓછી કેટલી હોવી જોઈએ? “બે ઇંચ કરતાં વધારે.” શા માટે? “કેમકે બે ઇંચ કરતાં વધારે ન લઈએ, એટલે દાખલા તરીકે ૧+૧ ઇંચ લઈએ તો બે લીટીઓનો સરવાળો ૨+૧=૩ છે એ ત્રીજી ૪ ઇંચ લાંબી લીટી કરતાં વધતો નથી.” (પુ.૦). આ ઉપરથી ત્રિકોણની બે બાજુની બાદબાકી ત્રીજી બાજુ કરતાં વધારે હોય છે કે ઓછી, એ વિષે શું સમજાય છે? “ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુની બાદબાકી ત્રીજી બાજુ કરતાં ઓછી હોય છે.”

ત્રિકોણોનું નાનામોટાપણું.

∠અબક ગમે તેવડો લો. અબ જેટલી ડહાં બાજુ લો. ઈ બિંદુ પાસે ∠ડહાંફ, ∠અબકથી નાનો કરો. ઈફ, બકની બરાબર કરો. ડફ અને અક સાંધો. અક, ડફ કરતાં નાની છે કે મોટી? ∠અબક ગમે તેવડો દોરો. અબ જેવડી ડહાં લીટી લો. ઈ બિંદુ આગળ ∠ડહાંફ, ∠અબકથી મોટો કરો. ઈફ, બકની બરાબર કરો. અક, ડફ સાંધો. અક, ડફથી નાની છે કે મોટી?

એક કાગળના કકડામાંથી બે નાના મોટા ખુણા કાપી કાઢો. બે નાની મોટી સળીઓ લો, અને તેવીજ એક બીજી જોડ લો. તેમાંથી એક જોડ લઈને તે (બે) સળીઓના છેડા એવી રીતે રાખો કે તે બે સળીઓની વચ્ચે કાગળના ખુણામાંના નાના ખુણા જેવડો ખુણો થાય. બીજી જોડ લો, અને તે બે સળીઓના છેડા એવી રીતે રાખો કે તે બે સળીઓની વચ્ચે કાગળના મોટા ખુણા જેવડો ખુણો થાય. કયું અંતર વધારે મોટું છે? પહેલી બે સળીઓના બીજા છેડા વચ્ચેનું, કે બીજી બે સળીઓના બીજા છેડા વચ્ચેનું? ઉપર વર્ણવેલા પ્રયોગ પરથી તમને શું સમજાય છે?

“જો એક ત્રિકોણની બે બાજુઓ બીજા ત્રિકોણની બે બાજુઓની બરાબર હોય, પણ પહેલાની બે બાજુઓની વચ્ચેના ખુણા બીજાની બે બાજુઓની વચ્ચેના ખુણાથી

મોટો હોય, તો પહેલાનો પાયો બીજના પાયાથી મોટો હોય છે.”

ગમે તે લંબાઈની અબ,બક લીટીઓ લઈને એક ત્રિકોણ કરો. ડર્ફ,ઈફ લીટીઓ અનુક્રમે અબ,બક જેવડી લઈને ગમે તેવો એક બીજને ત્રિકોણ કરો. અક,હફમાંથી કઈ બાજુ મોટી છે ? \angle અબક, \angle ડર્ફ માપો. કયો ખુણો મોટો છે ? અક,હફના નાનામોટાપણા સાથે \angle અબક, \angle ડર્ફના નાનામોટાપણાનો કંઈ પણ સંબંધ છે ? “હા.” (પુ૦). ગમે તેટલી લાંબી બે સળી લો. તેટલીજ લાંબી બીજ બે સળી લો. બે નાની મોટી સળી લો. તેમાંથી નાની સળી અને સળીઓની પહેલી જોડનો એક ત્રિકોણ કરો. મોટી સળી અને સળીઓની બીજ જોડનો બીજો એક ત્રિકોણ કરો. બે ત્રિકોણમાંથી એકની બે બાજુ બીજની બે બાજુઓની બરાબર છે, પણ એકનો પાયો બીજના પાયાથી મોટો છે. આ પાયાની સામેના શિરોબિંદુ આગળના ખુણા માપો. કયો ખુણો મોટો છે ? આ પરથી કયો સામાન્ય નિયમ સમજાય છે ?

“જો બે ત્રિકોણમાંથી એકની બે બાજુઓ બીજની બે બાજુઓની બરાબર હોય, પણ પહેલાનો પાયો બીજના પાયાથી મોટો હોય, તો જે ત્રિકોણનો પાયો મોટો છે તેના પાયાની સામેના ખુણો, નાના પાયાવાળા બીજ ત્રિકોણના પાયાની સામેના ખુણાથી મોટો હોય છે.”

ત્રિકોણના બીજ કેટલાક ધર્મ.

એક કાગળના કકડામાંથી એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ કાપી કાઢો. તેને (મધ્ય ભાગમાં) વાળીને શિરોબિંદુમાંથી પાયા પર લંબ કરો. લંબથી પાયાના જે બે ભાગ થાય છે તેમને સરખાવો. (પુ૦). શું જણાય છે ? “સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના શિરોબિંદુમાંથી પાયા પર લંબ દાર્યો હોય, તો પાયાના બે સરખા ભાગ થાય છે.”

એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ લો. તેનો પાયો વાળીને દુબાઓ. ત્રિકોણને વાળીને પાયાના મધ્યબિંદુથી શિરોબિંદુ સુધી લીટી

(અલખત સળરૂપે) દોરો. આ લીટીના પાયાની સાથે જે બે ખુણા થાય છે, તેમને એક બીજા સાથે સરખાવો, અને શું જણાય છે તે જુઓ. (પુ૦). “સમઢિખાણુ ત્રિકોણમાં શિરોબિંદુમાંથી પાયાના મધ્યબિંદુ સુધી દોરેલી લીટી પાયાની સાથે જે બે ખુણા કરે છે, તે કાટખુણા હોય છે અને (અલખત) સરખા હોય છે.”

એજ નિયમ સમખાણુ ત્રિકોણને લાગુ પડે છે કે? “પડે છે.” શા માટે?

એક ત્રિકોણની બધી બાજુઓને દુભાગો, અને ત્રિકોણના શિરો-બિંદુમાંથી સામી બાજુઓનાં મધ્યબિંદુ સુધી લીટીઓ (એટલે મધ્યગા*) દોરો. (પુ૦). આ લીટીઓનાં છેદનબિંદુઓ વિષે શી ખાસ બાબત જણાઈ આવે છે? “ત્રિકોણની બધી મધ્યગાઓ એક બીજાને એકજ બિંદુમાં છેદે છે.”

આ લીટીઓ એક બીજાને છેદીને તેમના જે બગ્ગે ભાગ કરે છે તેમને એક બીજા સાથે સરખાવો. (પુ૦). તમને શું દેખાય છે? “મધ્યગાનો ઉપલો ભાગ પાયા તરફના ભાગથી બમણો હોય છે.”

ત્રિકોણની ગમે તે બાજુઓને દુભાગો, ને તેમનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટી દોરો. આ લીટી, દુભાગેલી લીટીઓના શિરોબિંદુ તરફના ભાગો સાથે જે ખુણા કરે છે, તેમને પાયા આગળના ખુણાઓની સાથે સરખાવો. તેમજ આ લીટીની લંબાઈને પાયા સાથે સરખાવો. (પુ૦). આ ઉપરથી તમને પામે અને આ લીટીની વચ્ચે શા સંબંધ જણાય છે? “ત્રિકોણની બે બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટી ત્રીજી બાજુને સમાંતર હોય છે અને તેનાથી અર્ધી હોય છે.”

ધડી વાળીને ત્રિકોણની બાજુઓને દુભાગો. દુભાગનારાં બિંદુઓ ધડી વાળીને સાંધો. આ ધડીઓને લીધે ત્રિકોણના જે ચાર ભાગ

* ત્રિકોણના કોઈ પણ શિરોબિંદુમાંથી સામી બાજુના મધ્યબિંદુ સુધી દોરેલી લીટી ત્રિકોણની મધ્યગા કહેવાય છે.

ચાય છે, તેમને કાપી કાઢો. તેમને એક બીજા પર મૂકીને સરખાવો. (પુ૦). તમને શું જણાય છે ? “તે બધા એકરૂપ છે.”

ત્રિકોણની એક બાજુને એવી રીતે વાળો, કે તેના બે છેડા એક બીજા પર બરાબર આવી રહે. વાળવાથી પડેલો સળ તે બાજુને કાટખુણે દુભાગે છે. એજ પ્રમાણે બીજી બાજુને વાળો, અને પછી ત્રીજી બાજુને વાળો. આ બધો સળો એક બીજાને ક્યાં મળે છે, એ વિષે જે ખાસ બાબત જણાઈ આવતી હોય તે કહો. તેઓ એકજ બિંદુમાં મળે છે કે ? “હા.” (પુ૦). આ પરથી કયો સામાન્ય નિયમ નીકળે છે ? ત્રિકોણની બે બાજુઓ પર તેમનાં મધ્યબિંદુઓ-માંથી બે લંબ દોરો. તે બંધાં મળે છે ત્યાંથી ત્રીજી બાજુના મધ્યબિંદુ સુધી લીટી દોરો. આ લીટી ત્રીજી બાજુની સાથે કેવડો ખુણો કરે છે ? આ પરથી કયો નિયમ નીકળે છે ?

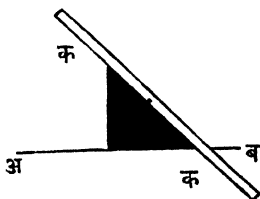
“ત્રિકોણની બાજુઓને દુભાગનારા લંબ એકજ બિંદુમાં મળે છે.”

ત્રિકોણના ખુણા ઘડી વાળીને દુભાગો. ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ એક બીજાને ક્યાં મળે છે, એ વિષે જે કંઈ ખાસ બાબત જણાઈ આવતી હોય તે કહો. “તે બધી એકજ બિંદુમાં મળે છે.”

લંબ.

આપેલા બિંદુમાંથી આપેલી લીટી પર લંબ દારવાની રીત:—

ધારો કે અવ આપેલી લીટી છે, અને ક આપેલું બિંદુ છે. ત્રિકોણમાપની કાટખુણો કરનારી એક બાજુ અબને લગાડીને માપ અબની ઉપર કે નીચે રાખો. પછી માપના



કર્ણને (એટલે કાટખુણાની સામેની બાજુને) લગાડીને કુટપટી મૂકો.

પછી ત્રિકોણમાપની કાટખુણો કરનારી બીજી બાજુ આપેલા બિંદુને બરાબર અડકી રહે ત્યાંસુધી માપને પટીની બાજુએ ને બાજુએ (જરૂર પ્રમાણે ઉપર કે નીચે) ખસેડો, અને આપેલા બિંદુમાંથી માપની બાજુની લગોલગ લીટી દોરો.

અब લીટી પર કહ લંબ દોરો. પછી ક બિંદુમાંથી કઈ, કફ,

કગ, ગમે તે બીજી લીટીઓ

અબને મળે એમ દોરો.

કહની લંબાઈ માપો. પછી

કઈ, કફ, કગની લંબાઈ

માપો. આ લીટીઓમાં સૌથી

નાની લીટી કઈ? “લંબ.”

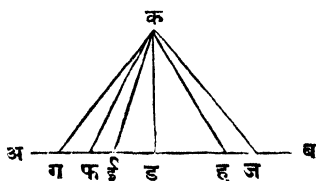
ક બિંદુમાંથી અब સુધી લંબથી નાની લીટી દોરી શકાશે કે? “ના.”

આ ઉપરથી, કોઈ એક બિંદુમાંથી એક લીટી સુધી જેટલી લીટીઓ દોરી શકાય, તેમાં સૌથી નાની લીટી કઈ, એ વિષે શા નિયમ સમજાય છે? “લંબ સૌથી નાની લીટી હોય છે.”

હકઈ અને હકફ ખુણા પૈકી મોટો ખુણો કયો? કઈ અને કફ આ લીટીઓમાં મોટી લીટી કઈ? તેમજ હકહ અને હકજ એ ખુણાઓમાં મોટો ખુણો કયો? કહ, કજમાં મોટી લીટી કઈ? કમાંથી અब લીટીને મળનારી જે લીટીઓ દોરી છે, તે લીટીઓ કહ લંબની સાથે જે ખુણા કરે છે, તેમાં હકઈ ખુણા કરતાં હકફ ખુણો મોટો છે, અને હકફ કરતાં હકગ મોટો છે; અને કઈથી કફ લીટી મોટી છે, અને કફથી કગ મોટી છે. આ ઉપરથી કોઈ એક બિંદુમાંથી કોઈ લીટી સુધી દોરેલી લીટીઓ તેજ બિંદુમાંથી તે લીટી પર દોરેલા લંબની સાથે જે ખુણા કરે છે, તે ખુણાઓનો તે લીટીઓની લંબાઈની સાથે શા સંબંધ જણાય છે?

“આ ખુણો જેમ મોટો તેમ તે લીટી લાંબી હોય છે.”

ઉપલી આકૃતિમાં \angle કઈહ, \angle કફહ, \angle કગહ એ ખુણાનું નાનામોટાપણું અને કઈ, કફ, કગ લીટીઓનું નાનામોટાપણું એ



બે વચ્ચે તમને કંઈ સંબંધ જણાઈ આવે છે? “લંબ તરફના ખુણા જેમ નાનો તેમ ખુણા કરનારી લીટી લાંબી હોય છે.”*

ચર લીટી પર દોરેલા કઢ લંબની સાથે ગમે તે ડકય ખુણા

કરો. \angle ડકય બરાબર \angle ડકર કરો.

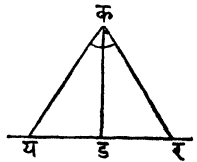
કય અને કર માપો. તેમને સરખાવો.

આ ઉપરથી લંબની સાથે સરખા ખુણા

કરનારી લીટીઓના સંબંધમાં તમને શું

જણાઈ આવે છે? “લંબની જોડે

સરખા ખુણા કરનારી લીટીઓ સરખી હોય છે.”



એક આડી લીટીમાં ગમે ત્યાં ર બિંદુ લો. તેના પરના લંબમાંના

ક બિંદુને મધ્યબિંદુ લઈને કર

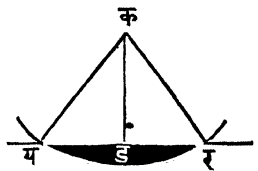
ત્રિજ્યાએ, આડી લીટીને ચ

બિંદુમાં છેદે એવો રચ કૌંસ દોરો.

કય, કર સાંધો. \angle ડકય,

\angle ડકરને સરખાવો. તમને શું

જણાઈ આવે છે?



ઉપલા પ્રયોગ પરથી, કોઈ લીટી પર દોરેલા લંબના કોઈ એક

બિંદુમાંથી તે લીટી સુધી સરખી લીટીઓ દોરી હોય, તો તેઓ

લંબ સાથે જે ખુણા કરે છે, તેમના સંબંધમાં શો નિયમ જણાય

છે? “આપેલી લીટી સુધી તેના પરના લંબમાંના કોઈ

બિંદુમાંથી દોરેલી સરખી લીટીઓ લંબની જોડે સરખા

ખુણા કરે છે.”

એક અબ લીટી દોરો. તેની બહાર ક બિંદુ લો. ક બિંદુથી

અબ કેટલે અંતરે છે? કમાંથી અબ સુધી ગમે તેટલી લીટીઓ

દોરી શકાશે, અને કદાચ એમ ધારવામાં આવશે કે તે બધી લીટીઓ

* તેમ છતાં પણ ઉપલા બે પ્રયોગ પરથી એમ સિદ્ધ થતું નથી કે

ખુણાના પ્રમાણમાંજ લીટીની લંબાઈ હોય છે, એટલે ખુણા દોઢગણો મોટા

હોય તો લીટી દોઢગણી મોટી કે નાની હોય.

ક અને અબ વચ્ચેનું અંતર દર્શાવી શકશે. પરંતુ કોઈ પણ એ સ્થળ વચ્ચેનું અંતર પૂછ્યું હોય, તો જે અંતર ઓછામાં ઓછું હોય તે આપણે કહીએ છીએ; માટે કથી અબ સુધીનું અંતર તે ક અને અબ વચ્ચેનું ઓછામાં ઓછું અંતર છે. આ અંતર કયું છે તે આગળ આવી ગએલા પ્રયોગ ઉપરથી આપણાથી કહી શકાશે કે? “આ અંતર ક્રમાંથી અબ પર દોરેલા લંબ છે,” કમાંથી અબ ઉપર લંબ દોરો. આ લંબ કરતાં નાની લીટી કમાંથી અબ ઉપર દોરી શકાશે કે? “ના.” આ પરથી આપણે જાણી શકીએ છીએ, કે આપેલું બિંદુ અને આપેલી લીટી એ એ વચ્ચેનું અંતર તે બિંદુ-માંથી તે લીટી પર દોરેલા લંબની લંબાઈ છે.

પ્રશ્ન.

- (૧) અબ=૧.૨” લો. બ છેડા સાથે કાટખુણો કરનારી લીટી દોરો.
- (૨) અબ, કડ લીટીઓ દોરો, અને બમાંથી કડ પર લંબ દોરો.
- (૩) ગમે તેવો એક ત્રિકોણ દોરો. તેના એક શિરોબિંદુમાંથી સામી બાજુ પર લંબ દોરો.

(૪) ગમે તેવો એક ખુણો કરો. તેને ઘડી વાળીને દુભાગો. દુભાગનારી લીટી (સળ) પર ગમે ત્યાં એક બિંદુ લો. આ બિંદુમાંથી ખુણાના બુજો પર લંબ દોરો. તે માપો અને તેમને સરખાવો. તમને શું દેખાય છે? “તે સરખા છે.”

(૫) ગમે તેવો એક ત્રિકોણ કાઢો. તેની બાજુઓ દુભાગો. દુભાગનારાં બિંદુઓમાંથી લંબો દોરો. તેમને એક બીજાને મળતાં સુધી લંબાવો. તેઓ એક બીજાને ક્યાં મળે છે એ વિષે તમને કંઈ વિશેષ બાબત જણાઈ આવે છે? (પુ.૦). “તે બધા એકજ બિંદુમાં મળે છે.”

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ.

જે સમાંતર લીટીઓ દોરો. તેમને છેદનારી એક લીટી દોરો. તેને સમાંતર બીજી લીટી દોરો. આ ચાર લીટીઓથી બનેલી આકૃતિની

સામસામી બાજુઓ સમાંતર છે, માટે તેને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ કહે છે.

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ જેવા દેખાતા કેટલાક પદાર્થનાં નામ કહેા. અટકળથી સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો. તેની બાજુઓ સમાંતર છે કે નહિ તે જુઓ.

વ્યાખ્યા:—જે ચતુષ્કોણની સામસામી બાજુઓ સમાંતર હોય છે તેને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ કહે છે.

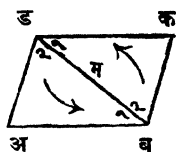
જુદા જુદા પ્રકારના સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો. તેમની સામસામી બાજુઓ અને સામસામા ખુણા માપો. તેમના કર્ણો દોરો, અને કર્ણોએ એક બીજાના કરેલા ભાગ માપો, અને તેમને સરખાવો. (પુ૦). આ પરથી તમને કોઈ સામાન્ય નિયમ સમજાય છે? “સામસામી બાજુઓ અને ખુણા સરખા હોય છે.” સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણથી થએલા બે ત્રિકોણરૂપ ભાગ એક બીજા પર મૂકી જુઓ. (પુ૦). શું જણાઈ આવે છે? “તેઓ એકરૂપ છે.”

(નીચેનો પ્રયોગ પ્રત્યક્ષ કરવો.)

અબકડ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. બડ કર્ણ છે. ડબનું મધ્યબિંદુ મ છે, એમ ધારો.

\angle અબડ = \angle બડક
 \angle અડબ = \angle કબડ

કારણ કે તે સમાંતર લીટીઓના વ્યુત્ક્રમ ખુણા છે.



હવે અબકડ ચતુષ્કોણની નકલ અબકડ ચતુષ્કોણ પર મૂકીને મ બિંદુની આસપાસ અર્ધા વર્તુળ જેટલી ફેરવીને મૂકી હોય તો મબ, મડ બરાબર છે તેથી બ, ડ પર પડશે. જ્યારે બ, ડ પર પડે છે, ત્યારે \angle અબડ, \angle બડકની બરાબર હોવાથી બમ, ડક પર પડશે. તેમજ ડમ = મબ, માટે ડ, બ પર પડશે; અને \angle અડબ = \angle કબડ છે, માટે ડઅ, વક ઉપર પડશે.

હવે બઝ, ઢક પર પડશે, અને ઢઝ, બફ પર પડશે, માટે
ઝ, ક પર બરાબર આવી રહેશે.

એજ પ્રમાણે બતાવી શકાશે કે ઢક, બઝ ઉપર પડે છે;
કબ, અઢ પર પડે છે; અને અલબત્ત ક, ઝ પર પડે છે.

આ ઉપરથી આપણે જોઈએ છીએ કે બઝ, ઢકની બરાબર
છે; અઢ, બકની બરાબર છે; અમ, મકની બરાબર છે; સામસામા
ખુણા એક બીજાની બરાબર છે; અને કર્ણથી સમાંતરબાજી ચતુષ્કોણના
બે સરખા ભાગ થાય છે.

ઉપલા બધા પ્રયોગો પરથી સમાંતરબાજી ચતુષ્કોણના કયા ધર્મ
જણાઈ આવે છે ?

“ સમાંતરબાજી ચતુષ્કોણમાં—

(૧) સામસામા ખુણા સરખા હોય છે,

(૨) સામસામી બાજીઓ સરખી હોય છે;

(૩) દરેક કર્ણથી સમાંતરબાજી ચતુષ્કોણના બે સરખા
ભાગ થાય છે; અને

(૪) બંને કર્ણ એક બીજાને દુભાગે છે.

સમાંતરબાજી ચતુષ્કોણના જુદા જુદા પ્રકાર.

એક બીજી સાથે મધ્યભાગે કાટખુણો કરનારી બે સરખી લીટીઓ
દોરો. તેમના છેડામાંથી પહેલી બે લીટીઓને સમાંતર લીટીઓ
દોરીને સમાંતરબાજી ચતુષ્કોણ પુરો કરો. આ ચતુષ્કોણની બધી
બાજીઓ અને ખુણા માપો, અને તેમને સરખાવો. શું જણાય છે ?
“ બધી બાજી સરખી છે, અને બધા ખુણા કાટખુણા છે. ” એવી
આકૃતિને ચોરસ કહે છે.

કાગળના બે સરખા ચોરસ કાપી કાઢો. તે પૈકી એક ચોરસ
બીજા પર જુદી જુદી રીતે મૂકીને ચોરસના ખુણા અને બાજીઓ
સરખાવો. શું જણાય છે ?

એક બીજી સાથે કાટખુણો કરનારી બે નાની મોટી લીટી લઈને

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ પુરો કર્યો હોય, તો જે આકૃતિ બને છે તેને લંબચોરસ કહે છે.

એક બીજી સાથે તિર્યક્ (સાંકડો કે પહોળો) ખુણા કરનારી બે સરખી લીટી લઈને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ પુરો કર્યો હોય, તો જે આકૃતિ થાય છે, તેને સમબાજુ ચતુષ્કોણ કહે છે.

એક બીજી સાથે તિર્યક્ (સાંકડો કે પહોળો) ખુણા કરનારી બે નાની મોટી લીટી લઈને સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ પુરો કર્યો હોય, તો જે આકૃતિ બને છે, તેને સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ કહે છે. [સમપ્રતિભુજ=સમ એટલે સરખી (છે) પ્રતિ એટલે સામસામી, ભુજ એટલે બાજુઓ (જેની તે).]

ઉપર ચોરસ વિષે જે પ્રયોગ કર્યા છે, તે લંબચોરસ, સમબાજુ ચતુષ્કોણ, અને સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ, એ બધાના સંબંધમાં કરો; અને તેમની બાજુઓ અને ખુણાઓ વિષે કયો નિયમ નીકળે છે તે જુઓ.

“લંબચોરસની સામસામી બાજુઓ સરખી હોય છે, અને સર્વ ખુણા કાટખુણા હોય છે.”

“સમબાજુ ચતુષ્કોણની સર્વ બાજુ સરખી હોય છે. અને ફક્ત સામસામા ખુણા સરખા હોય છે.”

“સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણની ફક્ત સામસામી બાજુઓ અને ખુણા સરખા હોય છે.”

નીચે આપેલી લંબાઈવાળી લીટીઓ લઈને તેમના પર ચોરસો દોરો:—

૧"; ૧.૨", ૧.૪", ૯ મિ.મી; ૧.૨ સે.મી; ૧.૫ સે.મી; ૨.૨ સે.મી.

નીચે આપેલી લંબાઈ પહોળાઈના લંબચોરસ દોરો:—

૨", ૧"; ૧.૨", ૧"; ૧.૪", ૦.૮"; ૩", ૨"; ૨.૨",

૧.૨"; ૩.૫", ૧.૪".

નીચે આપ્યા પ્રમાણે એક બાજુ અને ખુણા લઈને સમબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો:—

અવ=૧", \angle હઅવ=૪૫°; અવ=૧.૩", \angle હઅવ=૭૫°;
અવ=૧.૫", \angle હઅવ=૧૨૦°.

નીચે આપેલી બાબતો અને ખુણા લખીને સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ દોરો:—

અવ	હઅ	\angle હઅવ
૨"	૧.૫"	૩૦
૧.૨"	૧"	૧૨૦
૨"	૨.૨"	૧૦૦
૧.૭"	૧.૮"	૪૮

ચોરસ, લંબચોરસ, સમબાજુ ચતુષ્કોણ, અને સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ, એમના બંને કર્ણ દોરો; અને કર્ણોના ભાગો અને તેમની વચ્ચેના ખુણા સરખાવો. (પુઠ). શું જણાઈ આવે છે? “ચોરસના કર્ણો એક બીજાને કાટખુણે દુભાગે છે; લંબચોરસના કર્ણો સરખા હોય છે, અને તે તિર્યક્ (સાંકડા કે પહોળા) ખુણે એક બીજાને દુભાગે છે (અટલે તે એક બીજા પર લંબ હોતા નથી). સમબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણો એક બીજાને કાટખુણે દુભાગે છે. સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણના કર્ણો એક બીજાને તિર્યક્ ખુણે દુભાગે છે.”

વ્યાખ્યા—

જે ચતુષ્કોણની બધી બાબતો સરખી હોય છે અને બધા ખુણા કાટખુણા હોય છે તેને ચોરસ કહે છે.

જે ચતુષ્કોણના સર્વ ખુણા કાટખુણા હોય છે અને પાસપાસેની બાબતો નાની મોટી હોય છે, તેને લંબચોરસ કહે છે.

જે ચતુષ્કોણની સર્વ બાબતો સરખી હોય છે અને બધા ખુણા તિર્યક્ (બે સાંકડા અને બે પહોળા) હોય છે તેને સમબાજુ ચતુષ્કોણ કહે છે.

જે ચતુષ્કોણની ફક્ત સામસામી બાબતો સરખી હોય છે અને બધા ખુણા તિર્યક્ (બે સાંકડા ને બે પહોળા) હોય છે તેને સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ કહે છે.

જે ચતુષ્કોણના સર્વ ખુણા કાટખુણા હોય છે તેને કાટખુણા ચોખુણુ કહે છે.

જેની કોઈ પણ બાજુઓ સમાંતર નથી એવો એક ચતુષ્કોણ દોરો. તેની સામસામી બાજુઓ અને સામસામા ખુણા માપો. (૫૦). એવા ચતુષ્કોણની સામસામી કે પાસપાસેની બાજુઓ અને ખુણા હંમેશજ સરખા હોય છે કે ? એવા ચતુષ્કોણને વિષમબાજુ ચોખુણુ કહે છે; કારણ કે તેની બાજુઓ વિષમ એટલે નાની મોટી હોય છે.

ચોખુણુની ફક્ત બે બાજુ સમાંતર હોય તો તેને સમલંબ ચોખુણુ કહે છે.

ઉપર આપેલી વ્યાખ્યાઓની શરૂઆતમાં કહેલા ચોખુણુ કે ચતુષ્કોણના નિયમિત પ્રકાર સિવાય જેમના ધર્મ નિયમિત હોય એવો ચોખુણુનો હવે કોઈ બીજો પ્રકાર પડી શકે એમ છે કે ?

એક વિષમબાજુ ચોખુણુ અને એક સમલંબ ચોખુણુ હાથે દોરો. ચોરસ અને લંબચોરસના સર્વ ખુણા કાટખુણા હોય છે, માટે આ આકૃતિઓ કાટખુણુ ચોખુણુ કહેવાય છે.

અથવા કાટખુણુ ચોખુણુ કઈ બાબતમાં મળતા આવે છે ?
“તેમના બધા ખુણા સરખા હોય છે, અને તેમના બંને કર્ણ સરખા હોય છે.”

ચોરસ અને સમબાજુ ચોખુણુ કઈ બાબતમાં મળતા આવે છે ?
“તેમની બધી બાજુઓ સરખી હોય છે અને તેમના કર્ણો એક બીજા પર લંબ હોય છે.” તેઓ કઈ બાબતમાં જુદા પડે છે ? “.....”

અથવા સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ કઈ બાબતમાં મળતા આવે છે ?
“તેમની સામસામી બાજુઓ અને ખુણા સરખા હોય છે, અને તેમના કર્ણો એક બીજાને દુભાગે છે.”

લંબચોરસ અને સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ કઈ બાબતમાં એક બીજાને મળતા આવે છે ? કઈ બાબતમાં તેઓ જુદા પડે છે ?

ચતુષ્કોણના જુદા જુદા પ્રકાર નીચે અનુક્રમે આપ્યા છે, અને તેમની સામે ખાનાં પાડેલાં છે. તે ખાનાં કયા ધર્મ દર્શાવે છે તે ખાનાંની ઉપલી બાજુએ લખેલું છે. તો મથાળે આપેલા ધર્મ જે જે ચતુષ્કોણમાં હોય તેમની સામે તે ધર્મ દર્શાવનારાં ખાનાંમાં 'હા' એમ લખો.

	સામસામી બાજુએ અને ખૂણા સરખા છે?	ફળુ એક બીજાને દબાવે છે?	અથા ખૂણા ઢાટ ખૂણા છે?	ફળો સરખા છે?	ફળો એક બીજા પર લંબ છે?	પાસપાસેની બાજુ- ઓ સરખી છે?
સમપ્રતિભુજ ચતુષ્કોણ						
સમબાજુ ચતુષ્કોણ						
લંબચોરસ						
ચોરસ						
સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ						

એવા ચોખુણુ દોરો કે જેમની

(૧) સામસામી બાજુઓ સરખી હોય, અથવા

(૨) સામસામા ખુણા સરખા હોય, અથવા

(૩) સામસામી બે બાજુઓ સરખી અને

સમાંતર હોય, અથવા

(૪) જેમના કર્ણ એક બીજને દુભાગતા હોય; અને તેમની સામસામી બાજુઓ સમાંતર છે કે કેમ તે જુઓ. (પૃ. ૦).

આ ઉપરથી કયો સામાન્ય નિયમ નીકળે છે ?

“ચોખુણુમાં જો—

(૧) સામસામી બાજુઓની બે જોડમાંથી દરેક જોડમાંની બાજુઓ સરખી હોય; અથવા

(૨) સામસામા ખુણા સરખા હોય; અથવા

(૩) સામસામી બાજુઓની બે જોડમાંથી એક જોડમાંની બે બાજુઓ સરખી અને સમાંતર હોય; અથવા

(૪) કર્ણો એક બીજને દુભાગતા હોય, તો તે ચોખુણુ સમાંતરબાજુ હોય છે.”

પ્રશ્ન.

નીચેનાં માપ ઉપરથી કહેલી આકૃતિઓ બનાવો:—

(૧) જેની બાજુઓ ૪" અને ૫" હોય એવો કાટખુણુ ચોખુણુ.

“ ” ” ૩" અને ૨ $\frac{1}{2}$ " ” ” ” ”

“ ” ” ૩.૨" અને ૫" ” ” ” ”

“ ” ” ૧.૫" અને ૨" ” ” ” ”

(૨) જેની બાજુઓ ૩" અને ૪" હોય અને જેની બાજુઓની

વચ્ચેનો ખુણો ૪૦° હોય એવો સમાંતરબાજુ ચોખુણુ.

જેની બાજુઓ ૧" અને ૫"ને વચ્ચેનો ખુણો ૬૦° હોય એવો.

“ ” ૨" અને ૩" ” ૮૦° ”

“ ” ૫" અને ૪" ” ૧૨૦° ”

“ ” ૨" અને ૪" ” ૧૫૦° ”

(૩) નીચેનાં માપ ઉપરથી ચોખ્ખું કરો:—

અવ=૬૦૩ સે.મી., વ=૮૨°, વક=૮૨ સે.મી., ક=૯૦°,
કડ=૭૦૭ સે.મી.

અવ=૩૪", વક=૨૨", અડ=૨૦", અ=૬૮°, વ=૮૬°.

વ=૧૧૬°, વક=૧૪", ક=૯૯°, કડ=૧૦", ડ=૯૨°.

અ=૬૭°, વ=૧૧૩°, ક=૪૬°, અવ=૫૦૩", અડ=૮૦૬".

વ=૧૨૨°, ક=૧૩૦°, ડ=૪૫°, વક=કડ=૧૦૬".

અડ=૩", ડ=૧૧૮°, ડઅક=૨૭, વઅક=૩૫°, અવ=૨૦૪".

અક=૫૦૬", વઅક=૫૮°, ડઅક=૫૮°, વકઅ=૫૮°, ડકઅ=૬૯°.

અવ=૬૯°.

અવ=૧૦૮", વડ=૧૦૭", કડ=૨", અવડ=૧૧૮°, વડક=૨૩°.

અવ=કડ=૫૦૮ સે.મી.; અડ=૮૦૭ સે.મી.; અ=૭૨°, વડક=૪૬°.

પ્રકરણ ૨.

ભૂમિતિમાંની કેટલીક મૂળ કલ્પનાઓ અને વ્યાખ્યાઓ.

[સૂચના:—આની પહેલાંના સર્વ ભાગ જોમને ચાલી ગયો હોય
એવા વિદ્યાર્થીઓ માટેજ આ ભાગ છે. આ પહેલે ફેરે ન લેતાં
પહેલા ખંડના પુનરાવર્તન વખતેજ લેવો.]

ભૂમિતિ એટલે શું ?

એક ખેતરથી બીજું ખેતર કેટલું મોટું છે, તે તેમની લંબાઈ
અને પહોળાઈ જોઈને આપણે કહી શકીએ છીએ. એજ રીતે એક
લાકડાના ઘન કરતાં બીજો ઘન કેટલો મોટો છે, એ તેમની લંબાઈ,
પહોળાઈ, અને જડાઈ જોઈને કહીએ છીએ. પરંતુ આ કામ માટે
લંબાઈ, પહોળાઈ, અને જડાઈ પરથી પદાર્થોનું કદ નક્કી કરવાના

નિયમો બાંધવામાં આવ્યા છે, તે જાણવાની જરૂર છે. પદાર્થોની બાબતોના અને ખુણાઓના જે ધર્મો ઉપરથી આ નિયમો નક્કી થયા છે, તે ધર્મોનું વિવેચન જે શાસ્ત્રમાં કર્યું છે, તેને ભૂમિતિ કહે છે.

જમીન કેમ માપવી એનો વિચાર કરતાં, પદાર્થોની લંબાઈ, પહોળાઈ, અને ખુણા પરથી તેમનું પરિમાણ નક્કી કરવાના કેટલાક નિયમો લોકોના જાણવામાં આવ્યા; તેથી આ નિયમોના શાસ્ત્રનું ભૂમિતિ એ નામ પાડ્યું. [ભૂ=પૃથ્વી, જમીન; મિતિ=માપવું (નામ).]

પદાર્થ.

[નીચેના વિવેચનમાં ‘પદાર્થ’ શબ્દનો અર્થ જેને રૂપ કે આકાર હોય એવી કોઈ પણ વસ્તુ, એમ સમજવો.]

પદાર્થો જગા રોકે છે, તેથી તેઓ જેટલી અને જે પ્રકારની જગા રોકે છે, તેટલો અને તેવો તેમના આકાર હોય છે. પેટી ચોખ્ખંડી જગા રોકે છે માટે તેનો આકાર ચોખ્ખંડો હોય છે. જ્યારે કાદવનો ગોળો ગોળ જગા રોકે છે, ત્યારે તેનો આકાર ગોળ થાય છે. જે તેજ કાદવનો ગોળો કોઈ ચોખ્ખંડી પેટીને ભરી કાઢે, તો તે ચોખ્ખંડી પેટીમાંની જગા રોકશે, અને તેથી તેનો આકાર ચોખ્ખંડો થશે. પાણી ગાગરમાંની જગા રોકે છે, ત્યારે તે ગાગરનો આકાર ધારણ કરે છે; પણ તે એક સીસીમાં ભર્યું હોય તો તે સીસીનો આકાર ધારણ કરશે.

અથવા પદાર્થો વિષે આપણને નીચેના સામાન્ય નિયમ જાણાઈ આવે છે:—અથવા પદાર્થોને કોઈ પણ આકાર હોય છે, અને તેઓ કોઈ પણ જગા રોકે છે.

કેટલાક પદાર્થ (પાટીઆના કડકા વગેરે) એવા લો, કે જેમની પહોળાઈ અને જડાઈ સરખી હોય, પણ લંબાઈ ઓછીવત્તી હોય; કેટલાક એવા લો, કે જેમની લંબાઈ અને જડાઈ સરખી હોય, પણ પહોળાઈ ઓછીવત્તી હોય; અને કેટલાક એવા લો, કે જેમની લંબાઈ અને પહોળાઈ સરખી હોય, પણ જડાઈ ઓછીવત્તી હોય;

અને છોકરાઓ પાસે તેમની સરખામણી કરાવીને, અથવા અમુક પદાર્થ કેટલો મોટો છે, તે તેની બાજુઓની મદદથી તેમની પાસે કહેવડાવીને નીચેના સામાન્ય નિયમ કઢાવો:—

સર્વ પદાર્થોને લંબાઈ, પહોળાઈ, અને જડાઈ હોય છે. લંબાઈ, પહોળાઈ, અને જડાઈ, એ પરિમેયો સર્વ પદાર્થોને હોય છે; માટે સર્વ પદાર્થોને ત્રિપરિમેયાત્મક (એટલે ત્રણ પરિમેયોવાળા) કહે છે.

કેટલાક પદાર્થોને લંબાઈ, પહોળાઈ, અને જડાઈ—આ પરિમેયો પૈકી એક અથવા વધારે પરિમેયો સૂક્ષ્મ હોય છે, પરંતુ તે બીલકુલ હોતાં નથી એમ કદી પણ બનતું નથી.

લંબાઈ, પહોળાઈ, જડાઈ.

કોઈ પણ પદાર્થ જે બાજુએ વધતો જતો દેખાય છે, તે બાજુને તે પદાર્થની લંબાઈ; લંબાઈની સપાટીમાં હોઈને લંબાઈની સાથે કાટખુણો કરનારી આડી બાજુને તેની પહોળાઈ; અને આ બંનેની જોડે કાટખુણો કરનારી (અથવા બંને પર ઢિલી આવેલી) બાજુને તેની જડાઈ કહેવાનો સામાન્ય રિવાજ છે. પરંતુ કોઈ કોઈ વખતે પદાર્થની સૌથી મોટી બાજુને લંબાઈ, તેનાથી નાની બાજુને પહોળાઈ, અને સૌથી નાની બાજુને જડાઈ, એમ પણ કહે છે. તેમ છતાં એટલું ધ્યાનમાં રાખવું જોઈએ, કે લંબાઈ, પહોળાઈ, અને જડાઈ એ કેવળ સાંકેતિક (અને સાપેક્ષ) શબ્દો છે; અને તે શબ્દો કોઈ પણ બાજુને લગાડ્યા હોય, તોપણ તે પરથી ગણિત કરવામાં ભૂલ થવાનો સંભવ નથી.

પૃષ્ઠ.

આ દડાને જુદી જુદી બાજુએથી જુઓ. તેનો આકાર સર્વ બાજુએથી સરખો જ દેખાય છે કે? આ આંકણી (ગોળ આંકણી) તરફ જુદી જુદી બાજુએથી જુઓ. તેનો આકાર સર્વ બાજુએથી સરખો જ દેખાય છે કે? પંસેા સર્વ બાજુએથી જુઓ.

તેનો આકાર બધી તરફથી સરખોજ દેખાય છે કે? આ ઈંટ તરફ તમે ગમે તે બાજુએથી જુઓ તોપણ તે સરખીજ દેખાય છે કે? તે લંબાઈની બાજુએથી જોઈ હોય તો કેવી દેખાય છે? પહોળાઈની બાજુએથી જોઈ હોય તો કેવી દેખાય છે? ઉપલી બાજુએથી કેવી દેખાય છે? દડો બધી બાજુએથી સરખો દેખાય છે, પણ આંકણી, પૈસો, ઈંટ વગેરે પદાર્થો બધી તરફથી સરખા દેખાતા નથી. એનું કારણ શું? “તેમની બાજુઓ જુદા પ્રકારની છે, એટલે તેમનાં પૃષ્ઠ જુદા પ્રકારનાં છે.”

આ ઉપરથી પદાર્થોના સંબંધમાં વળી કયો ધર્મ સમજાય છે? “તેમને* પૃષ્ઠો હોય છે.”

દડાને કેટલાં પૃષ્ઠ હોય છે? શંકુને કેટલાં? ગોળાર્ધને કેટલાં? પૈસાને કેટલાં? પેટીને કેટલાં? “દડાને એક પૃષ્ઠ હોય છે, શંકુને અને ગોળાર્ધને બે પૃષ્ઠ હોય છે, પૈસાને ત્રણ પૃષ્ઠ હોય છે, પેટીને છ પૃષ્ઠ હોય છે.” વાંકાચુંકા પથ્થરને કેટલાં પૃષ્ઠ હોય છે? “તેને અનેક પૃષ્ઠ હોય છે.”

દડાનું પૃષ્ઠ અને ધનનું પૃષ્ઠ તપાસો. તે બે વચ્ચે તમને શો તફાવત જણાય છે? “દડાનું પૃષ્ઠ વક્ર છે, અને ધનનું પૃષ્ઠ સપાટ છે.”

પૃષ્ઠ બે પ્રકારનાં—સપાટ અને વક્ર.

જેનાં બધાં પૃષ્ઠો સપાટ હોય, એવા પદાર્થને ઓછામાં ઓછાં કેટલાં સપાટ પૃષ્ઠો હોય છે? “ચાર. દાખલા તરીકે, ત્રિકોણાકાર મિનારો કે શંકુ.”

કોઈ પણ પદાર્થનાં બે પૃષ્ઠો જ્યાં એકમેકને મળે છે ત્યાં શું દેખાય છે? “કોર.” આ કોર ભૂમિતિમાંથી કઈ આકૃતિ જન્મી દેખાય છે? “લીટી જન્મી.” બેથી વધારે પૃષ્ઠો જ્યાં એકમેકને મળે છે ત્યાં શું દેખાય છે? “અણી.” કોરો મળે છે ત્યાં શું દેખાય છે?

* બાજુ કરતાં પૃષ્ઠ શબ્દ વધારે સારો છે. બાજુ શબ્દનો કોર એવા પણ અર્થ થાય છે; પરંતુ પૃષ્ઠ શબ્દનો એકજ અર્થ થાય છે; તેથી પૃષ્ઠ શબ્દનો ઉપયોગ કર્યો હોય તો અર્થની બાબતમાં ગુંચવાડો થશે નહિ.

“ અણી. ” અણી, ભૂમિતિમાંની કઈ આકૃતિ જેવી દેખાય છે ?
 “ ખિંદુ જેવી. ”

જે પૃષ્ઠો ફક્ત એકજ લીટીમાં મળી શકે છે; તેથી ‘(પાસપાસેનાં)
 એ પૃષ્ઠોને એક બીજાથી ઓળખાવનારી આકૃતિને લીટી કહેવી. ’
 એવી, લીટીની વ્યાખ્યા કોઈ કોઈ વખતે આપવામાં આવે છે.

ત્રિકોણાકાર શંકુને પૃષ્ઠ કેટલાં ? કોરો કેટલી ? ખુણા કેટલા ?
 અણી કેટલી ? જે પૃષ્ઠ મળે છે ત્યાં શું દેખાય છે ? “ કોર. ” કોરો
 મળે છે ત્યાં શું દેખાય છે ? “ અણી. ” ત્રિકોણાકાર શંકુનાં એકજ
 વખતે વધારેમાં વધારે કેટલાં પૃષ્ઠ દેખાય છે ? (ધન, શંકુ, ઈટ.....
 વગેરેના સંબંધમાં એવાજ પ્રશ્નો પૂછવા.)

ઉપલા વિવેચન પરથી એમ સ્પષ્ટ માલમ પડશે કે પદાર્થોના
 છેડા પૃષ્ઠો હોય છે, પૃષ્ઠના છેડા (હદ) લીટીઓ હોય છે, અને
 લીટીના છેડા ખિંદુઓ હોય છે.

પૃષ્ઠને લંબાઈ હોય છે કે ? “ હા. ” પહોળાઈ હોય છે કે ?
 “ હા. ” જડાઈ હોય છે કે ? “ ના. ” (જડાઈ હોય છે એવો ઉત્તર
 કોઈ આપે તો નીચેના પ્રયોગ કરીને ચોક્કસ જવાબ કઢાવવો.)

(૧) આ તપેલામાંના પાણીનો પૃષ્ઠભાગ જુઓ. આ પૃષ્ઠ તપેલાના
 અંદરના ભાગને અડકેલું છે કે ? “ હા. ” આ પૃષ્ઠ જ્યાં (તપેલાની
 બાજુને) અડકે છે તેની નીચે બધું પાણીજ છે અને ઉપર બધી
 હવાજ છે; માટે આ પૃષ્ઠ પાણી અને હવાની વચ્ચે છે. જ્યાં પાણી
 પુરૂં થાય છે ત્યાં હવા શરૂ થાય છે; તો આ પૃષ્ઠને કઈ જડાઈ
 હોવાનો સંભવ છે ?

(૨) એક સીસીમાં તેલ અને પાણી ભરવાં; અને જ્યાં પાણી
 પુરૂં થાય છે ત્યાં તેલ શરૂ થાય છે, એ વાત બતાવીને, પૃષ્ઠને જડાઈ
 નથી એ વાત સ્પષ્ટ કરવી.

એક લાકડાનું પાટીઉં ઘસાતાં ઘસાતાં એટલું ઘસાયું, કે તેને
 જડાઈ નામની પણ બીલકુલ રહી નહિ; એવી આપણે કલ્પના કરીએ,

તો તેનો લંબાઈ પહોળાઈવાળો જે ભાગ રહ્યો તે પૃષ્ઠ છે; અર્થાત્ તેને જડાઈ નથી.

જમીનનું ક્ષેત્રફળ કાઢતી વખતે તેની ફક્ત લંબાઈ અને પહોળાઈનોજ વિચાર કરવો પડે છે; જડાઈનો બીલકુલ વિચાર કરવો પડતો નથી. આ ઠેકાણે જમીનના સંબંધમાં જે વાત ધ્યાનમાં લેવી પડે છે, તેનેજ પૃષ્ઠ કહેવું.

છાયાને લંબાઈ અને પહોળાઈ હોય છે, પણ જડાઈ હોતી નથી; માટે છાયા એ પૃષ્ઠનો એક ધણોજ સારો દાખલો ગણી શકાય.

વસ્તુ અને આકાશ એ બે વચ્ચેની હદ એ તે વસ્તુનું પૃષ્ઠ છે. પૃષ્ઠને પરિમેય કેટલાં ? “ બે. ” પૃષ્ઠના છેડા કઈ આકૃતિ જેવા દેખાય છે ? “ લીટી જેવા. ”

વર્તુળ, પરિધ, વ્યાસ, ક્રૅસ, અંત જ્યાં, એમને પરિમેયો કેટલાં ? પાતળા કાગળનો કડકો, છાયા, અને કાગળને લગાડેલા રંગનો થર એ પૃષ્ઠો કહેવાય કે ?

પૃષ્ઠની વ્યાખ્યા:—પૃષ્ઠને ફક્ત લંબાઈ અને પહોળાઈ હોય છે, પણ જડાઈ બીલકુલ હોતી નથી.

સપાટ પૃષ્ઠ અને વક્ર પૃષ્ઠ.

સપાટ પૃષ્ઠ અને વક્ર પૃષ્ઠ વચ્ચે શો તફાવત છે ? બે સપાટ પૃષ્ઠ (દાખલા તરીકે, ઘનની કે ઇંટની બાજુ) એકમેકને લગાડો. પછી બે વક્ર પૃષ્ઠો (દડાની કે નળાકારની બાજુ) એકમેકને લગાડો. બે સપાટ પૃષ્ઠો એક બીજા પર મૂકીને તેમને એક બીજા પર (ઘંટીના પડની માફક) જુદી જુદી દિશામાં ફેરવો. બે વક્ર પૃષ્ઠોને એક બીજા પર મૂકીને તેજ પ્રમાણે ફેરવો. આ બે બાબતોમાં શો ફરક જણાય છે ? “ સપાટ પૃષ્ઠો એક બીજા પર મૂક્યાં હોય, તો તે એક બીજા સાથે બરાબર મળી જાય છે, તેમની વચ્ચે અંતર રહેતું નથી; અને વક્ર પૃષ્ઠો એ બીજા પર મૂક્યાં હોય તો તેમની વચ્ચે કેટલુંક અંતર રહે છે. ”

સપાટ પૃથ પર ગમે ત્યાં બે બિંદુ લેા. તેમને સાંધનારી લીટી દોરા વડે દર્શાવો. (બિંદુઓની જગાએ ટાંકણીઓ ખોસવી, અને તેમાંની એક ટાંકણીથી બીજી ટાંકણી સુધી દોરા તાણી બાંધીને સીધી લીટી દર્શાવવી.) આ લીટી પૃથમાં રહે છે કે પૃથની બહાર રહે છે ? વાંકા અને ઊંડા પૃથ ઉપર બે બિંદુ લેા. તેમને સાંધનારી લીટી દોરાથી દર્શાવો. (પહેલાંની માફક બિંદુની જગાએ ટાંકણીઓ ખોસવી, અને એક ટાંકણીથી બીજી ટાંકણી સુધી દોરો તાણી બાંધીને સીધી લીટી દર્શાવવી.) તે (આખી) લીટી પૃથમાંજ રહે છે, કે પૃથની બહાર રહે છે ? વક્ર પૃથમાં બે બિંદુઓ ગમે ત્યાં લીધાં હોય, તો તેમને સાંધનારી સીધી લીટી હંમેશાં તે પૃથમાં રહે છે કે ?

આ પરથી સપાટ પૃથ અને વક્ર પૃથની વચ્ચે તમને શો તફાવત જણાય છે ? દડાના કે નળાકારના પૃથ પર ગમે ત્યાં બિંદુ લીધાં હોય, તો તે બિંદુઓને સાંધનારી સર્વ લીટીઓ સીધી હશે કે ? “ના.”

સપાટી.

કોઈ પૃથ સીધું કે સપાટ હોય તો તે એક સપાટીમાં છે એમ કહેવાય છે.

કોઈ પૃથ બધી દિશાઓમાં એકજ સીધી લીટીમાં વધાર્યું હોય, તો તે જે જગા રોકે છે, તે તે પૃથની સપાટી છે.

ઓછીવત્તી લંબાઈની ત્રણ લાકડીઓ ભોંયમાં ખોસવી. તેમના ઉપલા છેડા બિંદુઓ છે એમ ધારવાને છાકરાઓને કહેવું. તે લાકડીઓની (ટોચ) ઉપર મોટું પાટીલું આડું મૂકવું, એટલે લાકડીઓના છેડાથી દર્શાવાતી બિંદુઓની સપાટી પાટીઆથી દર્શાવાશે. આ પ્રયોગ જુદી જુદી રીતે ત્રણ ચાર વખત કરવો.

સપાટીનું લક્ષણ એવું છે, કે તેમાં ગમે તે બે બિંદુ લઈને તેમની વચ્ચે જે સીધી લીટી દોરી હોય, તો તે આખી લીટી તે સપાટીમાં રહે છે. (તે સીધી લીટીનો કોઈ પણ ભાગ તે સપાટીની બહાર થઈને જાય તો તે સપાટીજ નથી.)

સપાટી નક્કી કરવા માટે ઓછામાં ઓછાં કેટલાં બિંદુ જોઈએ ?

“ત્રણ.”

ચોપડીની છ બાજુમાંથી કઈ બાજુઓ એકજ સપાટીમાં હોય છે ? દાખડીની કઈ બાજુઓ એકજ સપાટીમાં હોય છે ?

ત્રણથી વધારે નાની મોટી લાકડીઓ ભોંયમાં ખોસવી, અને તેમના પર પાટીઈ આડું મૂકવું; એટલે એમ જણાઈ આવશે કે તે પાટીઈ જુદી જુદી સ્થિતિમાં કેટલીક સળીઓના છેડાને અડકે છે અને કેટલીકના છેડાને અડકતું નથી. આ ઉપરથી તે બધા છેડા એક સપાટીમાં નથી એ નક્કી થશે. ગમે તે ત્રણ લાકડીના છેડા પર પાટીઈ મૂકીને, તે છેડાથી દર્શાવેલાં બિંદુઓની સપાટીમાં બીજા છેડા આવે એટલા માટે તેમને કેટલા ઉપર નીચે કરવા જોઈએ, એ છોકરાંને પૂછવું; એટલે તેમને સપાટીના ખરાબર ખ્યાલ આવશે.

મેજ પરના પાટીઆની સપાટીમાં આસપાસની ભીંતના અને બીજી ચીજોના જે ભાગ છે તે દેખાડો.

ધારો કે મેજના એ પાયા નીચે પથ્થર મૂકવાથી મેજ ત્રાંસું થયું છે. હવે મેજ પરના પાટીઆની સપાટીમાં આસપાસની ભીંતના અને બીજા પદાર્થના જે ભાગ આવે છે તે બતાવો.

એકાદ પાટીઈ જુદી જુદી રીતે પકડીને તેની સપાટીમાં આવતા ભીંતના ભાગ બતાવવાને કહેવું. ભીંત ઉભી સપાટીમાં છે કે નહિ, એ આપણે શી રીતે જોઈ શકીશું ?

એક કાચનું પ્યાલું પાણીથી ભરો, પાણીના પૃથ્વીની સપાટી કઈ ? આ કાંઈ બીજી એક સપાટી છે એમ ધારો. કાંઈ પાણીમાં ત્રાંસું બોળો, આપણે જોઈએ છીએ કે કાંઈની સપાટી પાણીના પૃથ્વીને છેદે છે. આ એ સપાટી જ્યાં એકમેકને છેદે છે ત્યાં કઈ આકૃતિ દેખાય છે ? “લીટી.”

એક વક્ર અને એક સીધું, અથવા બંને વક્ર પૃષ્ઠો એકમેકને જ્યાં છેદે છે, ત્યાં કઈ આકૃતિ દેખાય છે ? “લીટી.” તે કદી પણ સીધી લીટી હોય છે કે ? “ના. તે વાંકી લીટી હોય છે.”

લીટી.*

કાળા પાટીઆ પર પટી મૂકવી. પટીની બાજુએ ચાકની અણી પાટીઆ પર ધીમેથી દાબવી; એટલે પાટીઆ પર ખિંદુ પડશે, પછી ચાક વચ્ચે વચ્ચે ઉપાડીને ખસેડતાં ખસેડતાં પાટીઆ પર ટપકાંની લીટી કરવી. આ ટપકાં વચ્ચેની ખાલી જગામાં બીજાં ટપકાં મૂકવાં, એટલે પહેલાંનાં ટપકાં વચ્ચેનું અંતર ઓછું થશે, એવી રીતે વારંવાર ટપકાં ઉમેર્યા હોય, તો તે બધાં એકમેકમાં મળી જઈને લીટી તૈયાર થશે. એ પ્રમાણે પ્રયોગ કરીને ટપકાં ટપકાં મળીને લીટી તૈયાર થાય છે આ વાતડું કઢાવવી.

કાળા પાટીઆ પર બે ખિંદુ લેવાં, અને તેમની વચ્ચે એક સીધી લીટી, અને કેટલીક વાંકી લીટીઓ દોરવી. પાણીમાં દોરો પલાળીને, દોરો લીટીઓની ઉપર પાથરીને, સર્વ લીટીઓની લંબાઈ માપવી. કઈ લીટી સોથી ટુંકી છે? આ લીટી સીધી છે કે વાંકી? “સીધી.” આના કરતાં ટુંકી લીટી આ બે ખિંદુઓની વચ્ચે દોરો. દોરી શકાય છે? “ના.” આ પરથી સીધી લીટીનો ક્યો ધર્મ જાણવામાં આવે છે? મુકરર અંતર પરનાં બે ખિંદુઓની વચ્ચે જો કેટલીક લીટીઓ દોરી હોય, તો તેમની લંબાઈ પરથી સીધી લીટી કઈ છે તે જાણી શકાશે?

કાળા પાટીઆ પર બે ખિંદુ લો. તે પર (બે) ચુંકો દોરો. આ ચુંકો વચ્ચે એક દોરો તાણીને બાંધો. આ દોરાથી લાંબા દોરા લઈને તેમના છેડા આ ચુંકો વચ્ચે બાંધો. પહેલા દોરાથી અને બીજા દોરાથી જે લીટીઓ બને છે, તેમાંની કઈ લીટી સીધી લીટી જેવી દેખાય છે? આ પરથી બે ખિંદુઓ વચ્ચે જો એક સીધી લીટી અને

* આ ભાગમાં સીધી લીટી અને વક્ર લીટી વચ્ચેના તફાવતના સંબંધમાં વિચાર કર્યો છે; તેથી પહેલાંના સંકેત પ્રમાણે આ ભાગમાં લીટી એ શબ્દનો અર્થ સીધી લીટી એમ ન લેતાં સાધારણ અર્થ લેવો.

જે વાત ફક્ત સ્થૂળ રીતે જોતાં ખરી છે, એ યાદ રાખવું. શાસ્ત્રની દૃષ્ટિથી એમ કહેવું ખરાબર નથી.

બીજી કેટલીક વાંકી લીટીઓ દોરી હોય, તો તે પૈકી સીધી હુંકી લીટી કઈ હોય છે, એ વિષે શું સમજાય છે ?

એ બિંદુ લો. તેમને સાંધનારી એક સીધી લીટી કાઢો. તેજ બિંદુઓને સાંધનારી બીજી એક સીધી લીટી દોરો. આ લીટી પહેલી લીટીથી જુદી છે કે ? “ના.” આ એ બિંદુઓ વચ્ચે તમે બીજી કોઈ સીધી લીટી દોરી શકશો ? “ના” આ ઉપરથી સીધી લીટીનો બીજો કયો ધર્મ જણાઈ આવે છે ?

કાળા પાટીઆ પર એ બિંદુ લો. તેમના પર ચુંકો મારો. તેમની વચ્ચે એક દોરો ખેંચીને બાંધો. બીજા એ ત્રણ દોરા તેવીજ રીતે તાણીને બાંધો. તે દોરા એકજ સ્થાનમાં પડે છે, કે જુદાં જુદાં સ્થાનમાં પડે છે ? આ પરથી એ બિંદુઓની વચ્ચે જુદી જુદી સીધી લીટીઓ કેટલી કાઢી શકાશે, એ વિષે શું જણાય છે ? “એક બિંદુથી બીજા બિંદુ સુધી એકજ સીધી લીટી કાઢી શકાય છે.”

એક સીધી લીટી દોરો. તેને

છેદનારી બીજી એક સીધી લીટી

દોરો. એક વાંકીચુંકી લીટી લો.

તેને વધારેમાં વધારે બિંદુઓમાં

છેદનારી બીજી સીધી અથવા

વાંકી લીટી (આકૃતિમાં બતાવ્યા

પ્રમાણે) દોરો. એ સીધી લીટીઓ એક બીજીને કેટલાં બિંદુઓમાં

છેદે છે ? “એક.” વાંકી લીટીઓ એક બીજીને કેટલાં બિંદુમાં છેદે

છે ? “એકથી વધારે બિંદુઓમાં.”

એકથી વધારે બિંદુઓમાં એક બીજીને છેદનારી એ સીધી

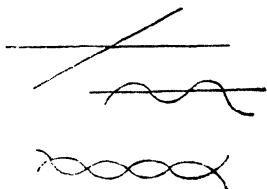
લીટીઓ દોરી શકાય કે ? “ના.” આ પરથી સીધી લીટીનો કયો

ધર્મ સમજાય છે ? “એ સીધી લીટીઓ એક બીજીને એકથી

વધારે બિંદુઓમાં છેદતી નથી.”

એ સીધી સળી લો, અને તેમની મદદથી કોઈ જગાને ઘેરી

લેવાનો પ્રયત્ન કરો. જગા ઘેરી લઈ શકાય છે કે ? “ના.”



એ સીધી લીટી દોરો, અને તેમનાથી કોઈ જગા ઘેરી લેવાનો પ્રયત્ન કરો. તેમ કરી શકાય છે કે ? “ના.” એ વાંકી લીટીઓ લઈને તેમના વડે કોઈ જગા ઘેરી લેવાનો પ્રયત્ન કરો. ઘેરી શકાય છે કે ? “હા.” આ પરથી સીધી લીટી અને વાંકી લીટી વચ્ચે શો તફાવત જણાય છે ? “**એ સીધી લીટી જગા ઘેરી શક્તી નથી.**”

એક આંખ મીચો, અને ઉઘાડી આંખ આગળ એક સીધી સળી અથવા એકાદ પાટીઆનો સીધો છેડો એવી રીતે ધરો, કે તેના અંતે છેડા અને આંખ એકજ સીધી લીટીમાં આવે. પછી એજ રીતે વાંકી સળી, લીટી, કે પાટીઆની વાંકી ધાર જુઓ. શો ફરક જણાઈ આવે છે ?

એક સીધી અને ત્રણ ચાર વાંકી લીટી લો. છેક પાતળા કાગળના અથવા ટ્રેસિંગ પેપરના જુદા જુદા કડકા પર તે લીટીઓની છાપ પાડો (નકલ પડે એમ કરો). એમાંથી દરેક કડકાને એવી રીતે વાળો કે તે પરની લીટીના ચાર ભાગ થાય. પછી દરેક લીટીના ગમે તે ભાગ પર, તેજ લીટીની છાપના ચાર ભાગમાંથી દરેક ભાગ મૂકીને તેનીચેની લીટી પર બરાબર આવી રહે છે કે કેમ તે જુઓ. કાગળના કડકા કચલાવીને તેજ પ્રયોગ કરો. સીધી લીટી અને વાંકી લીટી વચ્ચે આ પ્રયોગ પરથી શો ફરક જણાય છે ? “સીધી લીટીનો કોઈ પણ ભાગ તેના બીજા કોઈ પણ ભાગ પર મૂક્યો હોય, તો તે તે પર બરાબર આવી રહે છે; પણ વાંકા લીટીઓનું એમ થતું નથી.”

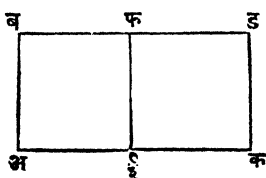
વ્યાખ્યા:—કોઈ પણ લીટીનો ગમે તે ભાગ (કિલટાઓ હોય તોપણ) ઉંચકીને તેજ લીટીના બીજા કોઈ પણ ભાગ પર (અંતે ભાગો એકજ દિશામાં રહે એવી રીતે) મૂક્યો હોય, ને તે તે પર બરાબર બેસે, તો તેને **સીધી લીટી** કહે છે. કોઈ સીધી લીટીમાંનું એક બિંદુ આપ્યું હોય, તો તે બિંદુ પરથી તે લીટી કઈ દિશામાં જાય છે તે કહી શકાય કે ? “ના.” ત્યારે કોઈ સીધી લીટી કઈ દિશામાં જાય છે તે નક્કી કરવા માટે તે લીટીમાંનાં ઓછામાં ઓછાં કેટલાં બિંદુ જાણવાની જરૂર છે ? “બે.”

આપેલાં એ બિંદુ વચ્ચે સીધી લીટી શી રીતે દોરશો ?

આપેલી લીટીઓમાંથી સીધી કઈ અને વાંકી કઈ, એ તેમની વચ્ચે દોરો તાણી બાંધીને શી રીતે કહેશો ?

કોઈ ખેતરમાં એક ઝાડથી બીજા ઝાડ સુધી દોરીની મદદથી સીધી લીટી કેવી રીતે કાઢશો ?

અવકાશ એક વીસ ઇંચ લાંબો અને દસ ઇંચ પહોળો કાગળનો કટકો છે. એને ખરાબર વચ્ચેથી વાળ્યો હોય, તો તેના જે એ ભાગ થશે તે આકૃતિથી દર્શાવવા છે. તે દર્શાવવા માટે પાસે દોરેલી છે તેવી આકૃતિ દોરી છે, એમ ધારો. આ આકૃતિમાં રૂફ લીટી

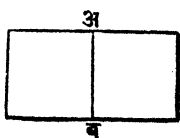
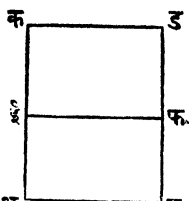


શું દર્શાવે છે ? “ અવકાશ કાગળના કકડાને દુભાગનાર સળની જગા. ” રૂફ લીટીની દિશામાં એક આગળ એક, એમ લીટીઓ દોરીને રૂફ અને અવ વચ્ચેની જગા પૂરી દો. એવી કેટલી લીટીઓ દોરી શકાય ? ધારો કે દસ લીટીઓ દોરી શકાય છે. જો દસ લીટીઓ વડે રૂથી અ સુધીની જગા પુરાઈ જાય, અને રૂથી અ સુધીનું અંતર ૧૦ ઇંચ હોય, તો દરેક લીટી કાગળની કેટલી લંબાઈ દર્શાવે છે ? “ એક ઇંચ. ” જો દરેક લીટી કાગળનો એક ઇંચ પહોળો કકડો દર્શાવે છે, તો રૂફ લીટી જે સળ બતાવે છે, તે સળ ખરેખર એક ઇંચ પહોળો છે કે ? તેની ખરી પહોળાઈ કેટલી ? સળે સળે કાગળ કાપ્યો હોય, તો સળની પહોળાઈ કાગળના કયા ભાગમાં જશે ? તે કોઈ પણ ભાગમાં ન જાય એવી રીતે કાગળ કાપી શકાશે કે નહિ ? “ કાપી શકાશે. ” ત્યારે સળને પહોળાઈ છે કે ? “ ના. ” સળને જો પહોળાઈ નથી, તો રૂફ લીટીને પહોળાઈ શા માટે છે ?

અવકાશ એક ખેતર છે, અને તે ક્ષ અને જ એ બે ભાઈઓને વહેંચી લેવું છે. તેમણે તેના અવકાશ અને ફક્કા એવા બે સરખા ભાગ કર્યા, અને દરેક જણે એકેક ભાગ લીધો. ધારો કે ક્ષને ભાગે દક્ષિણ તરફનો કુકડો આવ્યો, અને જને ભાગે ઉત્તર તરફનો કુકડો આવ્યો. આ બે કુકડા પાસેની આકૃતિમાં બતાવ્યા છે. તેમની વચ્ચે કંઈ જગ્યા છે કે? “ના” અ છે એમ જો તમે કહો, તો તે બે ભાઈઓમાંથી કોને ભાગે આવી છે, એ તમારે કહેવું જોઈએ. બે કુકડાની વચ્ચે જો જગ્યા નથી, તો ફક્ લીટી દોરી છે તે શા માટે? તે લીટી ખેતરનો કયો ભાગ દર્શાવે છે? “કોઈપણ નહિ.” ફક્ લીટીની નીચે અબ લીટી સુધી એકમેકને અડકાડીને એક પછી એક લીટીઓ દોરો. ધારો કે એવી વીસ લીટીઓ ફક્થી અબ સુધીની જગ્યા ભરી કાઢે છે. હવે જો વીસ લીટીઓ વડે ફક્થી અ સુધીની જગ્યા રોકાઈ જાય, અને ફક્ની લંબાઈ જો વીસ કુટ હોય, તો દરેક લીટી કેટલી જગ્યા દર્શાવે? “એક કુટ પહોળી.” ફક્ લીટી એક કુટ પહોળી જગ્યા દર્શાવે, તો એ કુકડો (ફક્ લીટીથી દર્શાવાતી એક કુટ પહોળી અને ... કુટ લાંબી જગ્યા) કોનો? ક્ષના અને જના ભાગના કુકડાઓની વચ્ચે જો જગ્યા રાખવાનું કારણ નથી, તો ફક્ લીટી શા માટે દોરી છે? “.....” જો આ લીટી જગ્યા દર્શાવતી નથી, તો તે ખરેખર શું દર્શાવે છે? “ક્ષની જમીન આ પુરી થાય છે, અને જની જમીન આ શરૂ થાય છે, તે તે દર્શાવે છે.”

ત્યારે લીટી ખરેખર જગ્યા દેખાડે છે, કે હદ? “હદ.”

બે છોકરીસા ધન લઈને એક બીજાને ખરાબર અડકાડીને મૂક્યા હોય, તો તેમનું ચિત્ર આપણે શી રીતે દોરીશું? પાસે દોરેલી આકૃતિ જુઓ. આ આકૃતિમાં અબ લીટી કાગળ પર કેટલીક જગ્યા રોકે છે, એ કારણથી શું આપણે બે

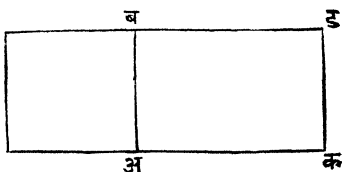


ધનની વચ્ચે કેટલીક જગા છે. એમ ધારી શકીએ ? “ના.” સારે આ લીટી શા માટે દોરી છે ? આ લીટી ક્ષેત્રફળ દેખાડે છે કે હદ ? “હદ.”

એક કાગળના કેટલાક ભાગને કાળો કે બીજો કોઈ રંગ લગાડ્યો હોય, તો તે રંગેલો ભાગ અને બાકીનો ઘોળો ભાગ એમની વચ્ચેની હદનો રંગ શો ? તેને બે રંગ નથી, તો હદ દેખાડનારી લીટીની પહોળાઈ કેટલી ? આ લીટીને પહોળાઈ હોઈ શકે ? “ના.”

ઉપલા દાખલામાં બે ધન જ્યાં એક બીજાને મળે છે, અથવા જ્યાં ખેતરના બે ભાગ એક બીજાને મળે છે, તે જગાને પહોળાઈ છે કે ? “ના.” લંબાઈ છે કે ? “છે.” આ જગા દેખાડવાને આપણે જે લીટી દોરીએ છીએ, તેને સહેજસાજ તો પહોળાઈ છેજ. પણ મૂળ જગાને પહોળાઈ ન હોય તો તે જગા દર્શાવનારી લીટીને પહોળાઈ શા માટે રાખવી ? પહોળાઈ રાખ્યા વગર તે લીટી દોરી શકાશે કે ? “ના.” એવી લીટી કાઢી શકાય નહિ, તેથી આપણે લીટીને પહોળાઈ રાખીએ છીએ. બાકી ખરેખર બેતાં લીટીને પહોળાઈ હોતી નથી.*

* પાસે દેખાડેલી આકૃતિ એક ખેતરનો નકશો છે. ધારો કે તેમાં અ ઝાડથી વ ઝાડ સુધી એક કરોળીઆએ પોતાનો તાંતણો તાણ્યો છે. હવે ખેતરના નકશાનું સ્કેલ આપ્યું હોય, તો કરોળીઆના તાંતણાની લંબાઈ



કેટલી છે તે કહી શકશો ? ધારો કે તે સ્કેલ ૧"=૧૦' છે; તો તે તાંતણાની લંબાઈ શી રીતે નક્કી કરશો ? “અવ લંબાઈ માપો. તે જેટલા ઇંચ ભરે તેને ૧૦એ ગુણો. જવાબ આવે તેટલા ફુટ સમજવા.” અવ લીટીને કંઈ પહોળાઈ છે કે ? “ના.” એમ કદાચ તમે કહેશો. અવથી આકૃતિના છંડા સુધી એક બીજાને અડકી રહે એવી લીટીઓ દોરો. ધારો કે એવી ૧૨૦ લીટી અવથી કંઈ સુધીની જગા ભરી કાઢે છે. હવે બે અથી ક સુધીનું

લીટી દારવાના હેતુ—કોઈ પદાર્થ ક્યાં શરૂ થાય છે, તે ક્યાં પુરો થાય છે, તેનો આકાર કેવો છે, અથવા તે કઈ દિશા તરફ વધે છે એ દેખાડવા માટે આપણે લીટી દોરીએ છીએ.

તેથીજ, જેને લંબાઈ છે પણ (ખરી) પહોળાઈ નથી તે **લીટી**, એવી લીટીની વ્યાખ્યા આપવામાં આવે છે.

વાળ અથવા ઝીણો દોરો એ લીટી છે કે ? “ના.” કારણ કહો. અક્ષાંશવૃત્તો, રેખાંશવૃત્તો,.....વગેરે લીટીઓ છે કે ? કારણ કહો. લીટીને લંબાઈ, પહોળાઈ, જડાઈ, એમાંથી ક્યાં પરિમેયો હોય છે ? “લંબાઈ.” ત્યારે હવે લીટીને કેટલાં પરિમેયો હોય છે ? “એક.”

ખિંદુ.

એક બીજીને છેદતી બે લીટી દોરો. આ લીટીઓ એક બીજીને જે ભાગમાં છેદે છે, તે ભાગ સિવાય બાકીનો બધો ભાગ ભૂસી નાખો. જે ભાગ રહ્યો છે તે બિંદુઓ, અને બે લીટીઓ એક બીજીને જ્યાં છેદે છે ત્યાં કઈ આકૃતિ દેખાય છે તે કહો. “ખિંદુ.”

એક દશાંશ ઇંચ પહોળી બે લીટીઓ એક બીજીને છેદે, તો તે બે ખિંદુમાં (એટલે જગામાં) છેદે છે, તે ખિંદુની લંબાઈ પહોળાઈ કેટલી ? “એક દશાંશ ઇંચ.”

એક વીસાંશ ઇંચ પહોળી બે લીટીઓ એક બીજીને છેદે, તો તે બે ખિંદુમાં છેદે છે તે ખિંદુની લંબાઈ અને પહોળાઈ કેટલી ? “એક વીસાંશ ઇંચ.”

અંતર ૧૦ ફુટ હોય, તો દરેક લીટીની પહોળાઈ $\frac{10 \times 12 = 120}{120} = 1$ ઇંચ

અંતર દર્શાવે છે. જે લીટી કરોળીઆનો તાંતણો દર્શાવે છે, તે બે એક ઇંચ પહોળાઈ દર્શાવે, તો કરોળીઆના તાંતણાની પહોળાઈ (જડાઈ) ૧ ઇંચ છે એમ નથી થવું કે ? બે લીટીની લંબાઈ પરથી તાંતણાની લંબાઈ નક્કી કરવાની હોય, તો તેની પહોળાઈ પરથી તાંતણાની પહોળાઈ (જડાઈ) શા માટે નક્કી ન કરવી ? જેથી તાંતણાની પહોળાઈ (એટલે જડાઈ) ખરાબર દર્શાવી શકાય એવી લીટી દોરો. “એવી લીટી કાઢી શકાતી નથી.” ત્યારે લીટીને પહોળાઈ નથી એમ માનવાની ખાસ જરૂર છે ? “હા.”

હવે જો લીટીને ખરેખર પહોળાઈ નથી, તો એ લીટીઓ એક બીજીને જે બિંદુમાં છેદે છે તે બિંદુની લંબાઈ પહોળાઈ કેટલી ?
“ બીલકુલ નહિ. ”

એ લીટીઓ એક બીજીને જ્યાં છેદે છે, ત્યાં બિંદુ બને છે. લીટીને ખરી પહોળાઈ હોતી નથી, માટે બિંદુને પણ લંબાઈ પહોળાઈ હોતી નથી. એમ છતાં બિંદુ અમુક સ્થાનમાં હોય છે, તેથી તેને સ્થાન કે સ્થિતિ હોય છે.

તેથી, ‘ જેને સ્થિતિ છે પણ મહત્ત્વ નથી તે બિંદુ, ’ એવી બિંદુની વ્યાખ્યા આપવામાં આવે છે.

પૃથ્વીના ધ્રુવ, સોયની અણી, વર્તુળનું મધ્યબિંદુ, ગુરુત્વમધ્યબિંદુ, ખુણાનું શિરોબિંદુ.....એ પૈકી બિંદુ ક્યાં છે અને ક્યાં નથી ?

પહોળાઈ વગરની લીટી, અને લંબાઈ અને પહોળાઈ વગરનું બિંદુ, કાઢવાં અશક્ય છે; માટે જે બિંદુ અને લીટીઓ આપણે કાઢીએ છીએ, તેમને ઉપલી વ્યાખ્યા પુરેપુરી લાગુ પડતી નથી.

બિંદુ આગળ ખસતું ગયું એવી કલ્પના કરીએ, એટલે લીટી બને છે; લીટી લંબાઈની સાથે ખુણા કરીને ખસતી ગઈ એવી કલ્પના કરીએ, એટલે પૃષ્ઠ બને છે; અને પૃષ્ઠ લંબાઈ અને પહોળાઈ જોડે ખુણા કરીને વધતું ગયું એવી કલ્પના કરીએ, એટલે ધનાકૃતિ બને છે.



નવી ભૂમિતિ ભાગ ૧.



ખંડ બીજો.

(પ્રમેય-સિદ્ધાંત.)

કેટલીક પારિભાષિક સંજ્ઞાઓનો અર્થ.



(નીચેનું સ્પષ્ટીકરણ દેવકુળેકૃત યુક્તિહત્તમાંથી લીધું છે.)

સિદ્ધાંત—જે શબ્દસમૂહમાં (૧) કંઈ સત્ય સિદ્ધ કરેલું હોય છે, અથવા (૨) કંઈ રચના કરી બતાવેલી હોય છે, તે શબ્દસમૂહને **સિદ્ધાંત** કહે છે.

પ્રમેય અને કૃત્ય—ઉપર સિદ્ધાંતના લક્ષણમાં જે બે પ્રકારના શબ્દસમૂહ કહ્યા, તેમાંથી પહેલાને **પ્રમેય** કહે છે, અને બીજાને **કૃત્ય** કહે છે.

ઉપસિદ્ધાંત—જે સિદ્ધાંત બીજા કોઈ સિદ્ધાંતોમાંથી એમ ને એમ નીકળે છે; અથવા જે તેની મદદથી હુંકામાં સિદ્ધ થાય છે, તેને તે સિદ્ધાંતનો **ઉપસિદ્ધાંત** કહે છે.

પ્રતિજ્ઞા—અમુક એક અથવા વધારે બાબતો આપેલી છે અને અમુક એક બાબત સિદ્ધ કરવી છે, એવું જે શબ્દસમૂહમાં જણાવેલું હોય છે, તેને **પ્રતિજ્ઞા** કહે છે. જેમકે:—“સમગ્રાણુ ત્રિકોણુ સમકોણુ હોય છે.”

પક્ષ અને સાધ્ય—કોઈ પણ સિદ્ધાંતમાં જે (એક કે વધારે) બાબતો આપેલી હોય છે, તે બધી એકઠી મળીને તે સિદ્ધાંતમાંનો **પક્ષ** કહેવાય છે; અને જે બાબત સિદ્ધ કરવાની હોય છે, અથવા જે એક કૃતિ કરવાની હોય છે, તે તે સિદ્ધાંતમાંનું **સાધ્ય** કહેવાય છે.

વ્યત્યાસ—કોઈ પણ સિદ્ધાંતમાંના પક્ષને બદલે, અથવા પક્ષમાં અનેક બાબતો હોય તો તેમાંથી કોઈ એક બાબતને બદલે, તેમાંનું સાધ્ય મૂક્યું હોય; અને સાધ્યને બદલે પક્ષ અથવા પક્ષમાંની પેલી એક બાબત મૂકી હોય, તો એવી રીતે જે સિદ્ધાંત થાય છે તેને મૂળ સિદ્ધાંતનો **વ્યત્યાસ** કહે છે. જેમકે:—“ સમગ્રાણુ ત્રિકોણુ સમકોણુ હોય છે.” આ મૂળ સિદ્ધાંત ગણ્યો હોય, તો “ સમકોણુ ત્રિકોણુ સમગ્રાણુ હોય છે,” એ તેનો વ્યત્યાસ થાય. “જે સંખ્યામાંના આંકડાનો સરવાળો ત્રણ વડે પુરેપુરી રીતે ભાગી શકાય છે, અને

જેના એકમના સ્થાનમાં શૂન્ય હોય છે, તે સંખ્યા છ વડે પુરેપુરી રીતે ભાગી શકાય છે;” આ મૂળ સિદ્ધાંત ગણ્યો હોય, તો “જે સંખ્યામાંના આંકડાનો સરવાળો ત્રણ વડે પુરેપુરી રીતે ભાગી શકાય છે અને આખી સંખ્યા પુરેપુરી રીતે છ વડે ભાગી શકાય છે, તેના એકમના સ્થાનમાં શૂન્ય હોય છે;” આ તેનો વ્યત્યાસ થાય.

સૂચના—(૧) આગળના પ્રમેયોમાં જે રચનાની જરૂર પડશે, તે આ પુસ્તકના પહેલા પ્રકરણમાં કહ્યા પ્રમાણે કરવાની છે. આ રચનાને ત્રીજા ખંડમાં આપેલા કૃત્યસિદ્ધાંતોની જરૂર નથી. કૃત્યોમાં રચના કરવાની રીત ઉપરાંત રચનાની સિદ્ધતા આપેલી હોય છે, પરંતુ આ સિદ્ધતાની પ્રમેયોને જરૂર નથી; કારણ કે પ્રમેયોને જરૂરની રચના બરાબર છે એમ ધારી લીધું હોય તોપણ ચાલે; માત્ર એ રચના કરવી શક્ય હોવી જોઈએ; નહિતો (આ રચના પર આધાર રાખતી) સિદ્ધતા ખોટી દરશે. આ કારણે લીધે નવી ભૂમિતિમાં કૃત્યોના પહેલાં પ્રમેયો શીખવી શકાય છે.

(૨) નવી ભૂમિતિમાં સર્વ આકૃતિઓ બરાબર કાઢવાની બહુ જરૂર છે, એ વાત ધ્યાનમાં રાખવી જોઈએ.

સંક્ષેપચિહ્નોનો અર્થ.

+ એટલે વૃદ્ધિ.	— એટલે ઓછા.
= એટલે ની બરાબર.	એટલે સમાંતર.
> એટલે થી મોટા.	< એટલે થી નાના.
∴ એટલે માટે, તેથી.	∴ એટલે કારણ કે.
એટલે ખુણા.	Δ એટલે ત્રિકોણ.

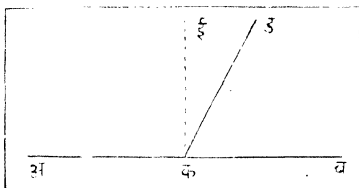
⊙ એટલે વર્તુળ. □ એટલે સમાંતરબાહુ ચતુષ્કોણ.

≡ એટલે એકરૂપ (બધી રીતે સરખા) છે.

પ્ર૦ એટલે પ્રમેય. કૃ૦ એટલે કૃત્ય.

પ્રમેય ૧.

એક સીધી લીટી બીજી સીધી લીટી પર પડે, તો તે બીજી લીટીની એક બાજુએ જે પાસપાસેના બે ખુણા થાય છે, તેમના સરવાળો બે કાટખુણાની બરાબર હોય છે.



પ્રશ્ન—કેવળ સીધી લીટી અથવા સીધી લીટી પર પડે છે.

સાધ્ય— \angle અકડ + \angle બકડ = ૨ કાટખુણા.

અથવા પર કેવળ લંબ હોય, તો \angle અકડ + \angle બકડ = ૨ કાટખુણા એ સિદ્ધાંત છે. પરંતુ અથવા પર કેવળ લંબ ન હોય તો—

રચના—અથવા પર કેવળ લંબ દેરો.

સિદ્ધતા— \angle અકડ = \angle અકઈ + \angle ફકડ. (પ્રત્યક્ષ.)

\angle બકડ = \angle બકઈ - \angle ફકડ.

$\therefore \angle$ અકડ + \angle બકડ = \angle અકઈ + \angle બકઈ.

પણ અકઈ + બકઈ = ૨ કાટખુણા. (રચના.)

$\therefore \angle$ અકડ + \angle બકડ = ૨ કાટખુણા.

ઉપસિદ્ધાંત—એક બિંદુમાંથી અનેક લીટીઓ દારી હોય, તો તે લીટીઓ વચ્ચે થતા સર્વ ખુણાનો સરવાળો ૪ કાટખુણા બરાબર હોય છે.

૧લા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. અમલ અને કમલ આ બે લીટીઓ એક બિંદુને મ બિંદુમાં છેદે છે, અને અમલ કાટખુણો છે; તો મ બિંદુ પાસેના બાકીના ખુણા કાટખુણા છે એ સિદ્ધ કરો.

૨. અવક ત્રિકોણમાં \angle અવક = \angle અકવ, અને વકને બંને બાજુએ વધારેલી છે; તો બહારના ખુણા સરખા છે એ સિદ્ધ કરો.

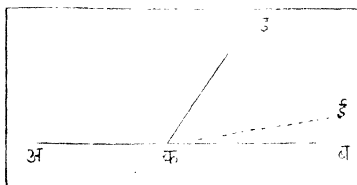
૩. અવક ખુણાને વડથી દુભાગ્યો છે, અને ડક, ઈ સુધી વધારેલી છે; તો \angle અવઈ = \angle કવઈ એ સિદ્ધ કરો.

૪. અવ લીટીને કઢ લીટી ક બિંદુમાં મળે છે, અને \angle અકઢ, \angle કવ અનુક્રમે કઈ અને કફ લીટીઓ વડે દુભાગેલા છે; તો \angle ઈકફ ઠાટખુણો છે એ સિદ્ધ કરો.

૫. જો અવ લીટીમાંના કોઈ પણ બિંદુમાંથી અનેક લીટીઓ અવની એકજ બાજુએ દોરેલી હોય, તો તેથી બનેલા સર્વ ખુણાનો સરવાળો ૨ ઠાટખુણા બરાબર છે એ સિદ્ધ કરો.

પ્રમેય ૨.

જો બે પાસપાસેના ખુણાનો સરવાળો બે ઠાટખુણાની બરાબર હોય, તો તે ખુણાઓના બહારના ભુજો એકજ સીધી લીટીમાં હોય છે.



પક્ષ—અકઢ અને કવ એ પાસપાસેના ખુણા છે, અને તેમનો સરવાળો બે ઠાટખુણા છે.

સાધ્ય—કઅ અને કવ એકજ સીધી લીટીમાં છે.

રચના—જો કઅ અને કવ એકજ સીધી લીટીમાં ન હોય, તો અકને વધારીને અકઈ સીધી લીટી દોરો.

સિદ્ધતા— \therefore અકઈ સીધી લીટી છે,

$$\therefore \angle$$
અકઢ + \angle કવઈ = ૨ ઠાટખુણા. (પ્ર. ૧)

પણ \angle અકડ+ \angle કકવ=૨ કાટખુણા, (પક્ષ)

$\therefore \angle$ અકડ+ \angle કકઈ= \angle અકડ+ \angle કકવ.

દરેક બાજુમાંથી સાધારણ \angle અકડ બાદ કર્યો;

\therefore શેષ \angle કકઈ=શેષ \angle કકવ.

\therefore કઈ, કવમાં મળી જાય છે, એટલે કઈ, કવની બહાર કે અંદર પડી શકતી નથી; અર્થાત્ કઅ, કવ એકજ સીધી લીટીમાં છે.

સૂચના—પ્રમેય ૧માં કઅ અને કવ એક સીધી લીટીમાં છે, એ પક્ષ છે; અને \angle અકડ+ \angle વકડ=૨ કાટખુણા, એ સાધ્ય છે; અને બીજા પ્રમેયમાં \angle અકડ+ \angle વકડ=૨ કાટખુણા, એ પક્ષ છે; અને કઅ, કવ એક સીધી લીટીમાં છે એ સાધ્ય છે. માટે પ્રમેય ૨ પ્રમેય ૧નો વ્યત્યાસ છે.

૨જા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. અવ લીટીમાંના અ બિંદુમાંથી અવની બંને બાજુએ કાટખુણા કરીને અક અને અડ લીટીઓ દોરેલી છે, તો કઅડ એક સીધી લીટી છે એ સિદ્ધ કરો.

૨. અમક લીટીમાંના મ બિંદુમાંથી તેની બંને બાજુએ મવ, મડ લીટીઓ એવી દોરેલી છે, કે \angle અમવ= \angle કમડ; તો વમડ એક સીધી લીટી છે એ સિદ્ધ કરો.

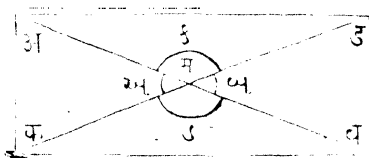
૩. મ બિંદુમાંથી મવ, મઅ, મક, એ ત્રણ લીટી દોરેલી છે; અને મપ લીટી \angle વમઅને અને મદ લીટી \angle અમકને દુભાગે છે. હવે જો વમદ કાટખુણો હોય, તો વમક સીધી લીટી છે એ સિદ્ધ કરો.

૪. બે લીટીઓ એક બીજાને કાટખુણે છેદે છે; તો તેમના સામસામા ખુણા દુભાગનારી લીટીઓ એકજ સીધી લીટીમાં છે એ સિદ્ધ કરો.

પ્રમેય ૩.

જો બે સીધી લીટીઓ એક બીજાને છેદતી હોય, તો તેમના શિરોબિંદુ આગળના સામસામા ખુણા એક બીજાની

બરાબર હોય છે.



પક્ષ—અવ અને કઢ સીધી લીટીઓ મ બિંદુમાં એક બીજીને છેદે છે, તેથી સામસામા ખુણાઓની બે જોડ થાય છે: એક $\angle અ$ અને $\angle બ$ ની બનેલી; અને બીજી $\angle ક$ અને $\angle ડ$ ની બનેલી.

સાધ્ય— $\angle અ = \angle બ$: અને $\angle ક = \angle ડ$.

સિદ્ધતા— \therefore કમઢ એક સીધી લીટી છે, અને અમ તે પર પડે છે;

$$\therefore \angle અ + \angle ક = ૨ \text{ કાટખુણા; (પ્ર૦ ૧)}$$

\therefore અમવ એક સીધી લીટી છે, અને ઢમ તે

પર પડે છે;

$$\therefore \angle બ + \angle ક = ૨ \text{ કાટખુણા; (પ્ર૦ ૧)}$$

$$\therefore \angle અ + \angle ક = \angle બ + \angle ક.$$

દરેક બાજુમાંથી $\angle ક$ સાધારણ કાઢી લીધો;

$$\therefore \text{શેષ } \angle અ = \text{શેષ } \angle બ.$$

તેજ પ્રમાણે $\angle ક = \angle ડ$ એ સિદ્ધ કરી શકાશે.

$$(\angle ક = \angle ડ \text{ એ સિદ્ધ કરો.})$$

૩જા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. જો કાટખુણાના બુજોને શિરોબિંદુ અથવા મેલનબિંદુની બીજી બાજુએ વધાર્યા હોય, તો બીજા જો ત્રણ ખુણા થાય છે તે બધા કાટખુણા હોય છે.

૨. અમઢ અને વમક એ લીટીઓ એક બીજીને મ બિંદુમાં છેદે છે. મય, \angle અમવને દુભાગે છે; તો એમ સિદ્ધ કરો કે મય વધારી હોય તો તે \angle કમઢને દુભાગે છે.

*જો બિંદુમાં બે અથવા વધારે લીટીઓ મળે છે તેને તેમનું મેલનબિંદુ કહે છે.

પ્રમેય ૧થી ૩ ઉપરના પ્રશ્ન.

૧. સીધી લીટીને વર્તુળાકારમાં ફેરવીને પ્રમેય ૧ અને સિદ્ધ કરો.

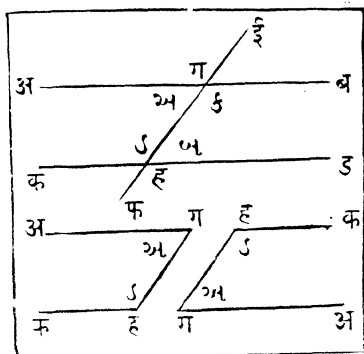
૨. એક બીજીને છેદનારી બે લીટીથી થએલા સામસામા બે ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ એકજ સીધી લીટીમાં હોય છે.

૩. મ બિંદુમાંથી મઅ, મવ, મક, મડ આ સીધી લીટીઓ એવી રીતે દોરેલી છે, કે \angle અમવ = \angle કમડ, અને \angle વમક = \angle અમડ; તો અમ અને મક, તેમજ વમ અને મડ લીટીઓ એક સીધી લીટીમાં છે એમ સિદ્ધ કરો.

૪. કોઈ પણ ખુણાના શિરોબિંદુમાંથી તે ખુણાના બંને ભુજ પર દોરેલા લંબોની વચ્ચેનો ખુણો મૂળ ખુણાની બરાબર હોય છે, અથવા તેનો ન્યૂનતાપૂરક હોય છે.

પ્રમેય ૪.

જો એક સીધી લીટી બીજી બે સીધી લીટીઓને છેદ અને વ્યુત્ક્રમ ખુણા બરાબર કરે, તો તે બે લીટીઓ એક બીજીને સમાંતર હોય છે.



પક્ષ—અવ અને કહ લીટીઓને ફીક લીટી ગ અને હ બિંદુઓમાં છેદે છે, અને $\angle અ$ અને $\angle બ$ વ્યુત્ક્રમ ખુણા સરખા છે.

સાધ્ય—અવ ॥ કહ.

સિદ્ધતા—

$$\therefore \angle અ + \angle ક = ૨ કાટખુણા, \quad (પ્ર. ૧)$$

$$\text{અને } \angle બ + \angle ડ = ૨ કાટખુણા, \quad (પ્ર. ૧)$$

$$\therefore \angle અ + \angle ક = \angle બ + \angle ડ.$$

$$\text{પણ } \angle અ = \angle બ. \quad (પક્ષ)$$

$$\therefore \angle ક = \angle ડ.$$

અગત્યક આકૃતિ કાપી કાઢો (અથવા તેની નકલ લો) અને તે વગરહ આકૃતિ પર એવી રીતે મૂકો, કે હ બિંદુ ગ પર પડે, અને હક, ગબની દિશામાં પડે.

તો $\therefore \angle ડ = \angle ક$, (ઉપર સિદ્ધ કર્યું છે.)

\therefore હગ, ગહની દિશામાં પડશે;

અને \therefore હગ = ગહ,

\therefore ગ બિંદુ હ બિંદુ પર પડશે.

હવે $\therefore \angle અ = \angle બ$,

\therefore ગઅ, હહની દિશામાં પડશે.

આ પ્રયોગ પરથી સિદ્ધ થાય છે કે ગવ અને હહ જે દિશામાં પડે છે, તેજ દિશામાં હક અને ગઅ પડે છે.

હવે અવ, કહ લીટીઓ સમાંતર ન હોય, તો તે કોઈ પણ એક બાણુએ મળવી જોઈએ. તે વ અને હની બાણુએ મળે છે એમ ધારીએ, તો તેમનીજ દિશામાં પડનારી હક, ગઅ એ લીટીઓ પણ અ અને ક તરફ મળશે એમ ધારવું જોઈએ. પણ જો અવ, કહ એ અ, ક તરફ મળે છે એમ ધારીએ, તો તેમની અને ગવ, હહની દિશા એકજ હોવાથી ગવ અને હહ પણ વ, હ તરફ મળશે એમ ધારવું જોઈએ (એટલે કે અવ અને કહ બંને છેડા તરફ મળે છે).

પણ જે બે સીધી લીટીઓ વચ્ચે કંઈ અંતર છે, તે બે બંને છેડા તરફ મળે, તો એનો અર્થ એજ થાય કે બે સીધી લીટીઓ જગા ઘેરી લે છે. પણ આ વાત અશક્ય છે. (૧૦૮મા પાના પરનો પ્રયોગ જુઓ.) માટે સિદ્ધ થાય છે કે અબ,કઢ કેઈ પણ બાજુએ મળતી નથી, એટલે તેઓ સમાંતર છે.

૪થા પ્રમેય પરનો પ્રશ્ન.

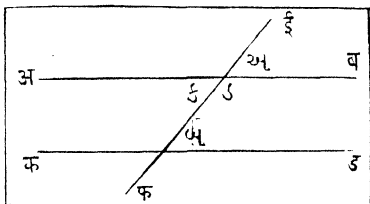
૧. અબકઢ એક ચતુષ્કોણ છે અને અક તેનો કર્ણ છે. બે \angle અક બરાબર \angle અકઢ, અને \angle કઅક = \angle અકબ, તો અબકઢ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે એ સિદ્ધ કરો.

પ્રમેય ૫.

જો એક સીધી લીટી બીજી બે સીધી લીટીઓને એવી રીતે છેદે કે—

(૧) બે સંગત ખુણા બરાબર હોય, અથવા

(૨) છેદક લીટીની એકજ બાજુના અંદરના ખુણા એક બીજાના ન્યૂનતાપૂરક હોય, તો તે બે સીધી લીટીઓ સમાંતર હોય છે.



(૧) પક્ષ—અબ અને કઢ લીટીઓને ઈફ છેદે છે, અને સંગત ખુણા અ અને બ બરાબર છે.

સાધ્ય—અબ ॥ કઢ.

સિદ્ધતા—

$$\angle \alpha = \text{સામેનો } \angle \text{ક},$$

(પ્ર. ૩)

$$\text{પણ } \angle \alpha = \angle \theta,$$

(પક્ષ)

$$\therefore \angle \theta = \angle \text{ક}.$$

અને $\therefore \angle \theta$ અને $\angle \text{ક}$ વ્યુત્ક્રમ ખુણા સરખા છે,

\therefore અવ ॥ કહ.

(પ્ર. ૪)

(૨) પક્ષ—ઈફ લીટીની એકજ બાજુના અંદરના ખુણા θ

અને \angle એક બીજાના ન્યૂનતાપૂરક છે.

સાધ્ય—અવ ॥ કહ.

સિદ્ધતા—

\therefore અવ એક સીધી લીટી છે અને તેને ફર્ફ મળે છે,

$$\therefore \angle \text{ક} + \angle \text{ડ} = ૨ \text{ કાટખુણા}.$$

(પ્ર. ૧)

$$\text{પણ } \angle \theta + \angle \text{ડ} = ૨ \text{ કાટખુણા},$$

(પક્ષ)

$$\therefore \angle \text{ક} + \angle \text{ડ} = \angle \theta + \angle \text{ડ}.$$

દરેક બાજુમાંથી $\angle \text{ડ}$ એ સાધારણ ખુણો લઈ લીધો.

$$\therefore \angle \text{ક} = \angle \theta.$$

અને આ વ્યુત્ક્રમ ખુણા છે,

\therefore અવ ॥ કહ.

(પ્ર ૪)

પમા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. પાસેની આકૃતિમાં,

(૧) જો $\angle \alpha = \angle \text{ક}$ હોય,

અથવા

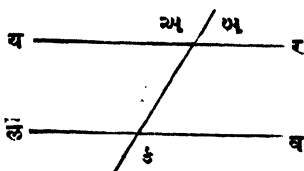
(૨) $\angle \theta + \angle \text{ક} = ૨$

કાટખુણા હોય; તો

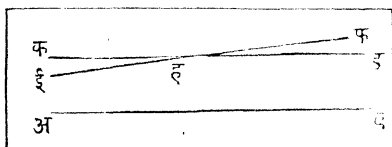
ચર ॥ લલ છે એમ બતાવો.

૨. જો એક સીધી લીટી પર બે લંબ દોર્યા હોય, તો તે એક

બીજાને સમાંતર હોય છે.



પ્લોફેરનું પ્રત્યક્ષ પ્રમાણ—એક બીજીને છેદનારી બંને સીધી લીટી એક ત્રીજી સીધી લીટીને સમાંતર હોઈ શકે નહિ.



દાખલા તરીકે, કડ, ફફ સીધી લીટીઓ એક બીજીને હ બિંદુમાં છેદે છે. એ પૈકી કડ, અબને સમાંતર છે; તો ફફ, અબને સમાંતર હોઈ શકશે નહિ. કારણ કે કડ લીટી અબને સમાંતર છે, એનો અર્થ એવો છે કે કડ અને અબની વચ્ચેનું બધું અંતર સરખું છે. હવે જ્યારે ફફ અને કડની વચ્ચેનું અંતર બધે સરખું નથી, ત્યારે ફફ અને અબ વચ્ચેનું અંતર બધે સરખું હોઈ શકે નહિ. માટે ફફ, અબને સમાંતર હોઈ શકે નહિ.

સમાંતર લીટીઓના સંબંધમાં યુક્તિવડનું પ્રત્યક્ષ પ્રમાણ નીચે પ્રમાણે છે:—

જો એક સીધી લીટી બીજી બે સીધી લીટીને એવી રીતે છેદે, કે તેની એકજ બાજુના બે અંદરના ખુણાનો સરવાળો બે કાટખુણાથી ઓછો થાય, તો તે બે લીટીઓ, જે બાજુ પરના ખુણાઓનો સરવાળો બે કાટખુણાથી ઓછો છે, તે તરફ વધારવાથી મળશે.

આ વિધાન ખરૂં જોતાં પ્રત્યક્ષ પ્રમાણ નથી; તે પ્રમેય ૮ના બીજા ઉપસિદ્ધાંતનો વ્યુત્પાદ છે, એ આગળ જણાઈ આવશે.

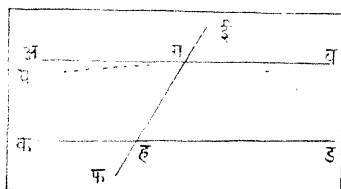
પ્રમેય ૬.

જો એક સીધી લીટી બે સમાંતર સીધી લીટીઓને છેદે તો તે—

(૧) વ્યુત્ક્રમ ખુણા સરખા કરે છે;

(૨) સંગત ખુણા સરખા કરે છે; અને

(૩) છેદક લીટીની એકજ બાજુના બે અંદરના ખુણા એક બીજાના ન્યૂનતાપૂરક કરે છે.



પક્ષ—અબ અને કડ સીધી સમાંતર લીટીઓ છે, અને ઈફ તેમને ગ અને હમાં છેદે છે.

સાધ્ય—(૧) \angle અગહ અને \angle ગહડ એ વ્યુત્ક્રમ ખુણા સરખા છે.

(૨) \angle ઈગવ અને \angle ગહડ એ સંગત ખુણા સરખા છે; અને

(૩) ઈફની એકજ બાજુના અંદરના ખુણા \angle વગહ અને \angle ગહડ એક બીજાના ન્યૂનતાપૂરક છે.

રચના—જો \angle અગહ અને \angle ગહડ સરખા ન હોય, તો એક ગય લીટી એવી દોરો, કે યગહ અને ગહડ વ્યુત્ક્રમ ખુણા સરખા થાય.

(૧) સિદ્ધતા—

$\therefore \angle$ યગહ = વ્યુત્ક્રમ \angle ગહડ, (રચના)

\therefore ગય \parallel કડ. (પ. ૪)

પણ અબ \parallel કડ, (પક્ષ)

\therefore ગય અને અબ એ બંને કડને સમાંતર.

પણ એ અશક્ય છે; (પ્રતિરૂપ પ્ર. પ્ર.)

$\therefore \angle$ અગહ, \angle ગહડ, એ સરખા નથી એમ

માની શકાતું નથી; એટલે કે તે સરખાજ છે.

(એજ પ્રમાણે \angle વગહ= \angle ગહક એ સિદ્ધ કરી શકાય.)

(૨) સિદ્ધતા—

\angle ઈગવ=સામેનો \angle અગહ. (પ્ર. ૩)

અને \angle અગહ= \angle ગહડ. (ઉપર સિદ્ધ કર્યું છે.)

$\therefore \angle$ ઈગવ= \angle ગહડ.

(એજ પ્રમાણે \angle ઈગઅ= \angle ગહક.)

(૩) સિદ્ધતા—

$\therefore \angle$ અગહ= \angle ગહડ, (પ્ર. ૧, ભાગ ૧)

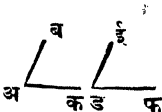
અને \angle વગહ, \angle અગહનો ન્યૂનતાપૂરક છે,

$\therefore \angle$ વગહ, \angle ગહડનો પણ ન્યૂનતાપૂરક છે.

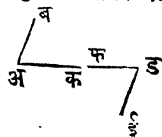
ઉપસિદ્ધાંત—જો બે ખુણાની બાજુઓ સમાંતર હોય, તે ખુણા સરખા અથવા ન્યૂનતાપૂરક છે.

ઉપલા ઉપસિદ્ધાંતના ૪ પ્રકાર થાય છે:—

(૧) જો \angle વઅક અને \angle ઈડફની બાજુઓ સમાંતર હોય અને એકજ દિશામાં દોરેલી હોય, તો તે ખુણા સરખા હોવા જોઈએ.



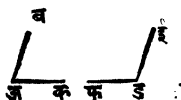
(૨) જો \angle વઅક અને \angle ફડઈની બાજુઓ સમાંતર હોય, અને તે સામસામી દિશામાં દોરેલી હોય, તો તે ખુણા સરખા હોવા જોઈએ.



(૩) ડફ,અક એકજ દિશામાં દોરેલી છે; અને ડઈ, અવ સામસામી દિશામાં દોરેલી છે. આ બાબતમાં ખુણા ન્યૂનતાપૂરક છે.



(૪) જો ડફ,અક સામસામી દિશામાં દોરેલી હોય, અને ડઈ,અવ એકજ દિશામાં દોરેલી હોય, તો તે ખુણા ન્યૂનતાપૂરક હોવા જોઈએ.



૬૬૧ પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. અવક ત્રિકોણમાં $\angle B = \angle C$, વક પાયાને સમાંતર ડર્ડ દોરેલી છે; તો $\angle ADE = \angle AED$ એ સિદ્ધ કરો.

૨. § * જે લીટી બે સમાંતર લીટીઓમાંથી એક પર લંબ હોય છે, તે બીજી પર પણ લંબ હોય છે.

૩. * સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણના સામસામા ખુણા એક બીજાની બરાબર હોય છે.

૪. સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણના સર્વ ખુણાનો સરવાળો કેટલો થાય છે? આ ઉપરથી ત્રિકોણના સર્વ ખુણાનો સરવાળો કેટલો થાય, તે નક્કી કરો. (ગમે તે ત્રિકોણ લો, અને તેના પાયાના બંને છેડામાંથી ત્રિકોણની સામી બાણુએ ત્રિકોણની બે બાણુને સમાંતર સીધી લીટીઓ દોરો અને એવી રીતે ચતુષ્કોણ પુરો કરો. પછી ઉપલા સવાલનો જવાબ આપો.)

૫. * જે સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણનો એક ખુણો કાટખુણો હોય, તો બીજા બધા ખુણા કાટખુણા હોય છે.

૬. * જે એક સીધી લીટી બીજી બે સીધી લીટીઓને એવી રીતે છેદે, કે તેથી તે લીટીની એકજ બાણુના અંદરના બે ખુણાનો સરવાળો બે કાટખુણાથી ઓછો થાય; તો તે બાણુ તરફ તે બે સીધી લીટીઓ વધારવાથી મળશે, એમ સિદ્ધ કરો.

૭. એક બીજીને છેદનારી કોઈ પણ બે સીધી લીટીઓની વચ્ચેનો સાંકડો ખુણો, તે સીધી લીટીઓને સમાંતર હોઈને એકમેકને છેદનારી બીજી કોઈ પણ સીધી લીટીઓની વચ્ચેના સાંકડા ખુણાની બરાબર હોય છે, અને પહોળો ખુણો તેને મળતા આવતા પહોળા ખુણાની બરાબર હોય છે.

૮. એક ખુણાના ભુજે બીજાના ભુજે ઉપર લંબ છે; તો તે ખુણા સરખા અથવા ન્યૂનતાપૂરક છે એમ સિદ્ધ કરો.

§ * આ ચિહ્ન જેમની શરૂઆતમાં છે તે પ્રશ્ન અંગત્યના છે, એટલે બીજા પ્રશ્નો છોડવામાં તેમનો ઉપયોગ થવાનો વિશેષ સંભવ છે એમ જાણવું.

૯. જે સમાંતર સીધી લીટીઓને છેદનારી લોટીથી થતા ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ એક બીજાને મળવાથી કાટખુણા ચોખુણા બને છે.

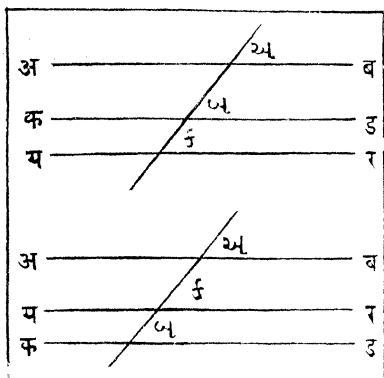
૧૦. સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણના ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ કાટખુણા ચોખુણા કરે છે એ સિદ્ધ કરો.

૧૧. અઘક ત્રિકોણના અ શિરોબિંદુમાંથી ઘક પાયાને સમાંતર સીધી લીટી દોરીને, ત્રિકોણના ત્રણે ખુણાનો સરવાળો જે કાટખુણા થાય છે એ સિદ્ધ કરો.

૧૨. અઘ અને કઙ એ સમાંતર સીધી લીટીઓને પ અને દ બિંદુઓમાં છેદનારી એક સીધી લીટી દોરેલી છે. એકજ બાણુ પરના પ અને દ ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ મમાં મળે છે. આ આકૃતિને એક વખતે મપ અને એક વખતે મદમાંથી વાળીને મ બિંદુ પદ, અઘ, અને કઙથી સરખે અંતરે છે એમ ખતાવી આપો.

પ્રમેય ૭.

જે સીધી લીટીઓ એકજ સીધી લીટીને સમાંતર હોય છે; તે પરસ્પર સમાંતર હોય છે.



પક્ષ—અવ અને કડ ॥ યર.

સાધ્ય—અવ ॥ કડ.

રચના—અવ, કડ, અને યરને છેદનારી એક સીધી લીટી દોરો.
($\angle અ, \angle બ, \angle ક$, આ સંગત ખુણા છે.)

સિદ્ધતા— \therefore અવ ॥ યર, (પક્ષ)

$$\therefore \angle અ = \text{સંગત } \angle ક. \quad (\text{પ્ર. ૬})$$

તેમજ \therefore કડ ॥ યર, (પક્ષ)

$$\therefore \angle બ = \text{સંગત } \angle ક. \quad (\text{પ્ર. ૬})$$

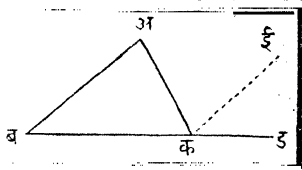
$$\therefore \angle અ = \angle બ.$$

\therefore આ ખુણા સંગત છે,

$$\therefore \text{અવ ॥ કડ.} \quad (\text{પ્ર. ૫})$$

પ્રમેય ૮.

ત્રિકોણના ત્રણે ખુણાનો સરવાળો બે કાટખુણાની બરાબર હોય છે.



પક્ષ—અવક ત્રિકોણ છે.

સાધ્ય— $\angle અ + \angle બ + \angle ક = ૨$ કાટખુણા.

રચના—બકને ડ સુધી વધારો. કમાંથી બઅ ॥ કઈ દોરો.

સિદ્ધતા— \therefore બઅ અને કઈ સમાંતર સીધી લીટીઓને અક છે છે,

$$\therefore \angle અ = \text{વ્યુત્ક્રમ } \angle અકઈ, \quad (\text{પ્ર. ૬})$$

અને \therefore બઅ અને કઈ સમાંતર સીધી લીટીઓને બક છે છે,

$\therefore \angle \text{બ} = \text{સંગત} \angle \text{ઈકડ.}$ (પ્ર. ૬)

$\therefore \angle \text{અ} + \angle \text{બ} = \angle \text{અકઈ} + \angle \text{ઈકડ.}$

દરેક બાબુમાં $\angle \text{અકબ}$ ઉમેરો.

$\therefore \angle \text{અ} + \angle \text{બ} + \angle \text{અકબ} = \angle \text{અકઈ} + \angle \text{ઈકડ} + \angle \text{અકબ.}$

પણ $\angle \text{અકબ} + \angle \text{અકઈ} + \angle \text{ઈકડ} = ૨$ કાટખુણા; (કારણ કે વક્ર એક સીધી લીટી છે); (પ્ર. ૧)

$\therefore \angle \text{અ} + \angle \text{બ} + \angle \text{અકબ} = ૨$ કાટખુણા;

એટલે અવક ત્રિકોણના ત્રણ ખુણાનો સરવાળો $= ૨$ કાટખુણા.

ઉપસિદ્ધાંત ૧—ત્રિકોણની એક બાબુ વધારવાથી થતો બહારનો ખુણો તેની પાસેના સિવાયના અંદરના બે ખુણાના સરવાળાની બરાબર હોય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૨—ત્રિકોણના કોઈ પણ બે ખુણાનો સરવાળો બે કાટખુણાથી ઓછો હોય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૩—ત્રિકોણની એક બાબુ વધારવાથી બનેલો બહારનો ખુણો તેની પાસેના સિવાયના કોઈ પણ અંદરના ખુણાથી મોટો હોય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૪—દરેક ત્રિકોણમાં ઓછામાં ઓછા બે ખુણા સાંકડા ખુણા હોય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૫—જો એક ત્રિકોણના બે ખુણા અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણના બે ખુણાની બરાબર હોય, તો તેમના ત્રીજા ખુણા પણ સરખા હોય છે. (એવા ત્રિકોણને પરસ્પર સમકોણ પણ કહે છે.)

ઉપસિદ્ધાંત ૬—ચતુષ્કોણના ચાર ખુણાનો સરવાળો ચાર કાટખુણા બરાબર હોય છે.

૮મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. અવક ત્રિકોણમાં $\angle \text{બ} = \angle \text{ક}$ છે; વચને અ તરફ ૬ સુધી લંબાવી છે; તો સાબીત કરો કે $\angle \text{કઅડ}$, $\angle \text{બ}$ અથવા $\angle \text{કનો}$ બમણો છે.

૨. કાટખુણુ ત્રિકોણના એ સાંકડા ખુણા સરખા હોય, તો સાબીત કરો કે તે સરખા ખુણામાંનો દરેક ખુણો અર્ધો કાટખુણો છે.

૩. સમબાજુ ત્રિકોણનો દરેક ખુણો કાટખુણાના એ તૃતીયાંશ બરાબર હોય છે.

૪. અઢબ ત્રિકોણના અ અને બ ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ દ્વારા મળે છે; તો અઢબ ખુણો પહોળો છે એ સિદ્ધ કરો.

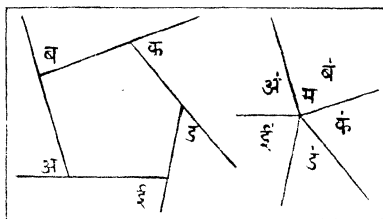
૫. ત્રિકોણનો એક ખુણો બીજા એ ખુણાના સરવાળાથી ઓછો હોય, તો તે ખુણો સાંકડો હોય છે, એ સિદ્ધ કરો અને એનો વ્યત્યાસ સિદ્ધ કરો.

૬. ત્રિકોણનો એક ખુણો બીજા એ ખુણાના સરવાળાથી વધારે હોય, તો તે પહોળો ખુણો હોય છે, આ નિયમ અને તેનો વ્યત્યાસ સિદ્ધ કરો.

૭. કાટખુણુ ત્રિકોણના કાટખુણાના શિરોબિંદુમાંથી કર્ણ પર દોરેલા લંબથી જે એ ત્રિકોણ થાય છે, તેમાંના દરેકના સર્વ ખુણા અનુક્રમે મૂળ કાટખુણુ ત્રિકોણના ખુણાની બરાબર હોય છે.

પ્રમેય ૯.

બહિર્વક* સીધી લીટી-આકૃતિની સર્વ બાજુઓ એકજ ક્રમે વધારી હોય તો તેથી બનેલા બધા બહારના ખુણાઓનો સરવાળો ચાર કાટખુણા બરાબર હોય છે.



*બહિર્વક—જેના સર્વ ખુણા બહારની બાજુથી બહિર્વક હોય, અથવા અંદરની બાજુથી અંતર્વક હોય, એવી.

પક્ષ—અવકર્ષ આ બહિર્વક સીધીલીટીવાળી આકૃતિની બાજુઓ એકજ ક્રમે વધારવાથી \angle અ, \angle બ, \angle ક, \angle ડ, \angle ઈ, આ બહારના ખુણા બનેલા છે.

સાધ્ય— \angle અ+ \angle બ+ \angle ક+ \angle ડ+ \angle ઈ = ૪ કાટખુણા.

રચના—આપેલી આકૃતિની બહાર કોઈ પણ મ બિંદુ લો. (આ બિંદુ આપેલી આકૃતિમાં લીધું હોય તોપણ ચાલે.)

આપેલી આકૃતિની બાજુઓ જે દિશામાં વધારેલી હોય, તેજ દિશામાં, તે આકૃતિની બાજુઓને સમાંતર સીધી લીટીઓ મ બિંદુમાંથી દોરો.

સિદ્ધતા—

$\therefore \angle$ અ, \angle બ, \angle ક, \angle ડ, \angle ઈની બાજુઓને સમાંતર દોરેલી લીટીઓની વચ્ચે અનુક્રમે \angle અ, \angle બ, \angle ક, \angle ડ, \angle ઈ આ ખુણા છે;

$\therefore \angle$ અ= \angle અ, \angle બ= \angle બ, \angle ક= \angle ક, \angle ડ= \angle ડ, \angle ઈ= \angle ઈ; (છટ્ટા પ્રમેયનો ઉપસિદ્ધાંત.)

$\therefore \angle$ અ+ \angle બ+ \angle ક+ \angle ડ+ \angle ઈ= \angle અ+ \angle બ+ \angle ક+ \angle ડ+ \angle ઈ.

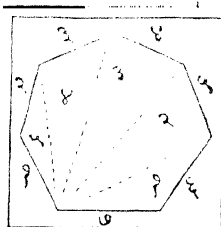
અને $\therefore \angle$ અ+ \angle બ+ \angle ક+ \angle ડ+ \angle ઈ = ૪કાટખુણા. (પ્ર.૧, ઉપ.)

$\therefore \angle$ અ+ \angle બ+ \angle ક+ \angle ડ+ઈ=૪ કાટખુણા.

ઉપસિદ્ધાંત—સ બાજુની સીધીલીટીવાળી આકૃતિના અંદરના ખુણાઓનો સરવાળો (૨ સ-૪) કાટખુણા થાય છે.

હમા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. પ્રમેય હતો આધાર લીધા સિવાય ઉપલો ઉપસિદ્ધાંત, એક શિરોબિંદુને બીજાં શિરોબિંદુઓની જોડે સાંધીને, અને એવી રીતે તે આકૃતિના ત્રિકોણ બનાવીને સિદ્ધ કરો. (નીચેની આકૃતિ જુઓ. આ ત્રિકોણની સંખ્યા ૬-૨ થાય છે.)



૨. એક ત્રિકોણની અબ, વક, કઅ બાજુઓ વધારવાથી ત્રણ બહારના ખુણા થયા છે. આ બહારના ખુણા પૈકી એ ખુણાનો સરવાળો જો બહારના ત્રીજા ખુણાથી બમણો હોય, તો ત્રિકોણનો એક ખુણો કે કાટખુણો છે એ બતાવો.

૩. અબક ત્રિકોણમાં અડ, વઈ, કફ એવી દોરી છે, કે તેઓ અબ, વક, કઅની સાથે ડઅબ, ઈવક, ફકઅ ખુણા સરખા કરે છે. હવે જો અડ, વઈ, કફ એક બિંદુમાં ન મળતી હોય, તો તેઓ એક ત્રિકોણ કરશે, અને તેના ખુણા અબક ત્રિકોણના ખુણાની બરાબર થશે, એ સિદ્ધ કરો.

૪. અબકડઈ એક પંચકોણ છે, અને એની કોઈ પણ બાજુઓ સમાંતર નથી. તે સર્વ બાજુઓ બંને તરફ વધારી હોય, તો ફ, ગ, હ, ચ, લ બિંદુઓમાં મળે છે; તો ફ, ગ, હ, ચ, લ ખુણાઓનો સરવાળો એ કાટખુણા બરાબર છે એ બતાવો.

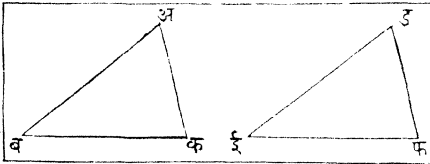
૫. જેમનો બહારનો ખુણો અનુક્રમે 60° , 30° , 84° હોય, એવી નિયમિત બહુકોણાકૃતિને બાજુ કેટલી ?

૬. જેનો એક બહારનો ખુણો 94° , 7° , 99° , 6° , 5° અથવા 80° હોય, એવી નિયમિત બહુકોણાકૃતિ હોઈ શકે ?

૭. જેનો અંદરનો ખુણો 90° , 92° , 93° , 94° , અથવા 60° હોય, એવી નિયમિત બહુકોણાકૃતિ હોઈ શકે ?

પ્રમેય ૧૦.

જો એક ત્રિકોણની બે બાજુઓ અને તેમની વચ્ચેના ખુણા અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણની બે બાજુઓ અને તેમની વચ્ચેના ખુણાની બરાબર હોય, તો તે ત્રિકોણો એકરૂપ હોય છે.



પક્ષ—અવક અને ડઈફ ત્રિકોણમાં અવ=ડઈ; અક=ડફ, અને $\angle A = \angle D$.

સાધ્ય— Δ અવક $\equiv \Delta$ ડઈફ.

. સિદ્ધતા—

Δ અવકને Δ ડઈફ પર એવી રીતે મૂકો, કે અ બિંદુ ડ પર પડે, અને અવ બાજુ ડઈની દિશામાં પડે.

\therefore અવ=ડઈ; (પક્ષ)

\therefore બ સિરોબિંદુ ઈ પર પડે છે.

અને $\therefore \angle A = \angle D$, (પક્ષ)

\therefore અક, ડફની દિશામાં પડે છે.

અને \therefore અક=ડફ, (પક્ષ)

\therefore ક સિરોબિંદુ ફ પર પડે છે.

$\therefore \Delta$ અવક, Δ ડઈફ પર બરાબર આવી રહે છે; એટલે તે ત્રિકોણો એકરૂપ છે.

૧૦મા પ્રમેય પરના પ્રક્ષ.

૧. જો અવ અને કડ સીધી લીટીઓ એક બીજાને કાટખુણે દુભાગે, તો અકબડ આકૃતિ સમબાજુ ચતુષ્કોણ થશે.

૨. એક સમદ્વિબાણુ ત્રિકોણની અથ અને અક સરખી બાણુઓમાં જ અને ચ બિંદુ એવાં લીધાં છે, કે અક્ષ=અચ; તો એમ સિદ્ધ કરો કે કક્ષ=વચ છે અને કક્ષ અને વચ, વક સાથે સરખા ખુણા કરે છે.

૩. *જો અથ અને કહ સીધી લીટીઓ એક બીજીને દુભાગે, તો અકવહ આકૃતિ સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણ થાય.

૪. *અથક ત્રિકોણના વક પાયાનું હ મધ્યબિંદુ છે. અ અને હ સાંધો, અને અહને ઈ સુધી એવી રીતે વધારો, કે હઈ=અહ થાય. એમ સિદ્ધ કરો કે અથ=ઈક, અને અક ॥ ઈવ.

૫. અથકહ એક ચતુષ્કોણ છે, અને તેમાં અથ=કહ, અહ=વક, અને \angle અ= \angle ક છે; તો અથકહ સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણ છે એ સિદ્ધ કરો.

૬. * ચોરસનો કર્ણ જે ખુણાઓમાં ચર્ચન બન્ય છે તેમને દુભાગે છે અને ચોરસને પણ દુભાગે છે, એ સિદ્ધ કરો.

૭. * સમદ્વિબાણુ ત્રિકોણના પાયાની સામેના ખુણાને દુભાગનારી લીટી (૧) પાયાને દુભાગે છે, (૨) પાયા પર લંબ થાય છે, (૩) તે ત્રિકોણને દુભાગે છે, અને (૪) આ લીટીમાંનું કોઈ પણ બિંદુ પાયાના બે છેડાથી સરખે અંતરે હોય છે.

૮. * ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાણુના મધ્યબિંદુમાંથી તે બાણુઓ પર દોરેલા લંબ જે બિંદુમાં મળે છે તે બિંદુ ત્રિકોણના શિરોબિંદુઓથી સરખે અંતરે હોય છે.

૯. * લીટીને દુભાગનાર લંબમાંનું કોઈ પણ બિંદુ તે લીટીના બંને છેડાથી સરખે અંતરે હોય છે.

૧૦. અથકહ અને ચરલવ ચતુષ્કોણોમાં અથ=ચર, વક=રલ, કહ=લવ, \angle વ= \angle ર, અને \angle ક= \angle લ; તો આ આકૃતિઓ એકરૂપ છે એમ સિદ્ધ કરો.

૧૧. * અથ અને કહ લીટીઓ સરખી અને સમાંતર છે, તો અક અને વહ સરખી અને સમાંતર છે એ બતાવો.

૧૨. બે સમઢિબાણુ ત્રિકોણોના પાયાની સામેના ખુણા સરખા છે, અને તેમાંના એક ત્રિકોણ બીજા પર એવી રીતે મૂકેલો છે, કે તેમના પાયાની સામેના ખુણા એક બીજા પર બરાબર આવી રહે છે. હવે એમ સિદ્ધ કરો કે તે ત્રિકોણોમાંના એકનાં શિરોબિંદુઓની સાથે બીજા ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓને સાંધનારી લીટીઓ સરખી છે.

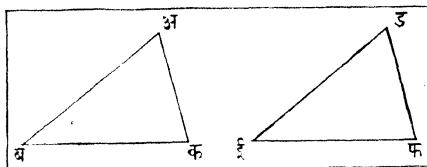
૧૩. અવક સમઢિબાણુ ત્રિકોણની અવ અને અક બાણુ પર અવહ અને અકચ એવા સમબાણુ ત્રિકોણ બહારની બાણુએ દોરેલા છે; તો કહ=ચક એ સિદ્ધ કરો.

૧૪. અવક સમઢિબાણુ ત્રિકોણની અવ અને અક બાણુ પર બહારની બાણુએ અવહચ અને અકલમ ચોરસ દોરેલા છે; તો વમ=કચ એ બતાવી આપો.

૧૫. અવકડ ચોરસમાં મ બિંદુ ગમે ત્યાં લીધેલું છે. મઅ પર અડની બાણુએ અમઈફ ચોરસ દોર્યો છે; તો વમ=ડફ એ બતાવો.

પ્રમેય ૧૧.

. જો બે ત્રિકોણમાંના એકના બે ખુણા અનુક્રમે બીજાના બે ખુણાની બરાબર હોય, અને એકની એક બાણુ તેને મળતી આવતી બીજાની એક બાણુની બરાબર હોય, તો તે બે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.



પ્રકાર ૧ લો—

પક્ષ—અવક અને ડઈફ આ બે ત્રિકોણમાં $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$, અને વક=ઈફ (સરખા ખુણાઓને અડકેલી બાણુઓ.)

સાધ્ય— \triangle અવક \equiv \triangle ડઈફ.

સિદ્ધતા—

\triangle અવક, \triangle ડઈફ પર એવી રીતે મૂકો, કે α , β , γ પર પડે, અને α , β , γ ની દિશામાં પડે.

હવે \therefore $\alpha = \beta$, (પક્ષ)

\therefore α , β પર પડે છે.

અને \therefore $\angle \alpha = \angle \beta$ અને $\angle \gamma = \angle \delta$, (પક્ષ)

\therefore α , β અનુક્રમે γ , δ ની દિશામાં પડે છે.

\therefore α , β પર આવી રહે છે.

\therefore \triangle અવક \equiv \triangle ડઈફ.

પ્રકાર ૨જો—

પક્ષ—અવક અને ડઈફ ત્રિકોણોમાં $\angle \alpha = \angle \beta$, $\angle \gamma = \angle \delta$ અને $\alpha = \beta$ (અને ત્રિકોણોમાંના એકેક સરખા ખુણાની સામેની બાજુઓ સરખી.)

સાધ્ય— \triangle અવક \equiv \triangle ડઈફ.

સિદ્ધતા— $\angle \alpha + \angle \beta + \angle \gamma = 2$ કાટખુણા. (પ્ર. ૮)

$\angle \delta + \angle \epsilon + \angle \phi = 2$ કાટખુણા. "

\therefore $\angle \alpha + \angle \beta + \angle \gamma = \angle \delta + \angle \epsilon + \angle \phi$.

પણ $\angle \beta + \angle \gamma = \angle \epsilon + \angle \phi$, (પક્ષ)

\therefore શેષ $\angle \alpha =$ શેષ $\angle \delta$.

હવે અવક અને ડઈફ ત્રિકોણોમાં,

\therefore $\angle \alpha = \angle \delta$,

$\angle \beta = \angle \epsilon$,

અને $\alpha = \beta$;

\therefore \triangle અવક \equiv \triangle ડઈફ. (પ્ર. ૧૧. પ્રકાર ૧)

૧૧મા પ્રમેય પરના પ્રક્ષ.

૧. બે કાટખુણા ત્રિકોણ પૈકી એકનો કોણ અને એક સાંકડો.

ખુણો બીજા ત્રિકોણના એજ અવયવોની બરાબર હોય, તો તે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.

૨. * જો ત્રિકોણના એક ખુણાને દુભાગનારી લીટી સામી બાજુ પર લંબ હોય, તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ હોય છે.

૩. એકરૂપ ત્રિકોણોના સરખા ખુણાનાં શિરોબિંદુઓમાંથી સામી બાજુઓ પર દોરેલા લંબ સરખા હોય છે.

૪. અબક ત્રિકોણમાં અબ=અક; તો બ અને ક ખુણામાંથી સામી બાજુ પર દોરેલા લંબ સરખા છે, એ (સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના ધર્મેના ઉપયોગ કર્યા વગર) સિદ્ધ કરો.

૫. * અબક ત્રિકોણમાં \angle બ= \angle ક; તો બ અને ક શિરો-બિંદુમાંથી સામી બાજુ પર દોરેલા લંબ સરખા છે એ સિદ્ધ કરો.

૬. * ખુણાને દુભાગનારી લીટીમાંનું કોઈ પણ બિંદુ ખુણાના બુજેથી સરખે અંતરે હોય છે.

૭. * અબક ત્રિકોણના બ અને ક ખુણાને દુભાગનારી વચ્ચે અને કમ લીટીઓ મ બિંદુમાં મળે છે. વક, કઅ, અવ પર અનુક્રમે મય, મર, મલ લંબ દોરેલા છે; તો મય = મર = મલ એ સિદ્ધ કરો.

૮. ગ અને હ એક બીજાને છેદનારી લીટીઓ છે, અને ય એક ત્રીજી લીટી છે. યમાં એવાં બે બિંદુઓ શોધી કાઢો, કે તે ગ અને હથી સરખે અંતરે હોય. આ વાત ક્યારે અશક્ય હોય છે?

૯. પચરસ ચતુષ્કોણનો પર કર્ણ \angle પ અને \angle રને દુભાગે છે; તો \triangle પચર= \triangle પસર એ સિદ્ધ કરો.

૧૦. બે સમાંતર લીટીઓ વચ્ચેનું અવ લંબાંતર કમાં દુભાગેલું છે. ક બિંદુમાં થઈને જનારી કોઈ પણ લીટી દોરી છે, અને તે સમાંતર લીટીઓને પ અને ચ બિંદુઓમાં મળતાં સુધી વધારેલી છે; તો કપ=કચ એ સિદ્ધ કરો.

૧૧. અબકડ એક ચતુષ્કોણ છે, અને વડ પર અઈ અને

કફ લંબ દોરેલા છે. હવે જો અઈ, કફ બરાબર હોય, તો બડ, અકને દુભાગે છે એ બતાવી આપો.

૧૨. * સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણની સામસામી બાણુઓ સરખા હોય છે.

૧૩. * સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણના કર્ણ એક બીજાને દુભાગે છે.

૧૪. અવકઢ એક ચતુષ્કોણ છે, અને અક કર્ણ \angle અ, \angle કને દુભાગે છે; તો અક, બીજા કર્ણ બડની સાથે કાટખુણો ઠરે છે એ સિદ્ધ કરો.

૧૫. અવ લીટીનું ક મધ્યબિંદુ છે, અને આ બિંદુમાં થઈને જનારી કોઈ પણ લીટી દોરી છે; તો અ અને વમાંથી આ લીટી પર દોરેલા લંબ સરખા છે એ સિદ્ધ કરો.

૧૬. અવ લીટી પર અ અને વ છેડા આગળ વિરૂદ્ધ દિશાઓમાં લંબો દોરેલા છે; અને અવના મધ્યબિંદુ કમાં થઈને જનારી લીટી તે લંબોને અનુક્રમે ઢ અને ફમાં મળે છે; તો અડ=વઈ, અને કઢ=કઈ એ સિદ્ધ કરો.

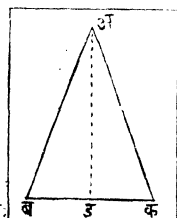
૧૭. એક વર્તુળની કા અ અને કાવ ત્રિજ્યાઓ એક બીજી પર લંબ છે. અમ અને વન તે વર્તુળના કોઈ પણ વ્યાસ પર દોરેલા લંબ છે; તો અમ=કન અને વન=કમ એમ બતાવી આપો.

૧૮. અવકઢ ચતુષ્કોણના અ,વ,ક,ઢ ખુણા અનુક્રમે ફ,ગ,હ ચતુષ્કોણના ફ,ગ,હ ખુણાની બરાબર છે; અવ, કઢ અનુક્રમે ફ, ગહની બરાબર છે; અને અડ, વક લીટીઓ એવી છે, કે તે વધારી હોય તો મળે; તો આ ચતુષ્કોણો એકરૂપ છે એમ બતાવો.

૧૯. અવક ત્રિકોણનાં અ,વ,ક શિરોબિંદુઓમાંથી અનુક્રમે વક, કા, અવ બાણુઓને સમાંતર લીટીઓ દોરેલી છે. આ લીટીઓ ઢ,ઈ,ફ બિંદુઓમાં મળે છે; તો એમ બતાવો, કે ઢઈફ ત્રિકોણની બાણુઓનાં અ,વ,ક મધ્ય બિંદુઓ છે.

પ્રમેય ૧૨.

ત્રિકોણની બે બાજુઓ સરખી હોય, તો તે બાજુઓની સામેના ખુણા પણ સરખા હોય છે.



પક્ષ—અવક ત્રિકોણ છે, અને તેમાં અવ=અક.

સાધ્ય— \angle બ = \angle ક.

રચના— \angle બઅકને દુભાગનારી અડ દોરો. ધારો કે તે વકને ડમાં મળે છે.

સિદ્ધતા—

\therefore અવડ અને અકડ ત્રિકોણોમાં,

અવ=અક; (પક્ષ)

અડ અને ત્રિકોણોમાં સાધારણ છે;

\angle બઅડ = \angle કઅડ; (રચના)

$\therefore \triangle$ અવડ = \triangle અકડ. (પ-૧૦)

$\therefore \angle$ બ = \angle ક.

ઉપસિદ્ધાંત ૧—સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાની સામેના ખુણાને દુભાગનારી લીટી (૧) પાયાને દુભાગે છે, (૨) પાયા પર લંબ હોય છે, અને (૩) ત્રિકોણને દુભાગે છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૨—સમબાજુ ત્રિકોણ સમકોણ હોય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૩—સમબાજુ ત્રિકોણનો દરેક ખુણો 60° હોય છે.

૧૨મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. સમદ્વિબાણુ ત્રિકોણની સરખી બાણુઓ પાયા તરફ વધારી હોય તો તેથી થતા બહારના ખુણા સરખા હોય છે.

૨. સમદ્વિબાણુ ત્રિકોણના પાયાની સામેના શિરોબિંદુ પાસેના બહારનો ખુણો પાયા આગળના દરેક ખુણાથી બમણો હોય છે.

૩. અવક અને હવક આ બે સમદ્વિબાણુ ત્રિકોણ એકબી પાયા વક પર, છે, અને પહેલો ત્રિકોણ બીજાની અંદર છે; તો \angle અવક = \angle અકક એ સિદ્ધ કરો.

૪. ઉપલા પ્રશ્નમાંના ત્રિકોણો વકની સામસામી બાણુઓ છે એમ ધારીને તેનો જવાબ આપો.

૫. * સમદ્વિબાણુ ત્રિકોણના શિરોબિંદુનાં પાયાના મધ્યબિંદુ સાથે સાંધનારી લીટી પાયા પર લંબ હોય છે, એ ક્રમવિરુદ્ધ⁺સિદ્ધતાથી સિદ્ધ કરો.

૬. * ચતુષ્કોણની સર્વ બાણુઓ સરખી હોય તો સામસામી ખુણા સરખા હોય છે.

૭. * ત્રિકોણની મધ્યગા પાયાથી અર્ધી હોય તો તે ત્રિકોણ કાટખુણુ ત્રિકોણ હોય છે.

૮. * સમદ્વિબાણુ ત્રિકોણના પાયાની સામેના શિરોબિંદુમાંથી પાયા પર દોરેલો લંબ પાયાને દ્વિભાગે છે.

૯. સમદ્વિબાણુ ત્રિકોણના પાયાના મધ્યબિંદુમાંથી સરખી બાણુઓ પર દોરેલા લંબ સરખા હોય છે.

૧૦. * સમદ્વિબાણુ ત્રિકોણના પાયાના છેડામાંથી સામી બાણુઓ પર દોરેલા લંબ સરખા હોય છે.

૧૧. સમદ્વિબાણુ ત્રિકોણના પાયાના મધ્યબિંદુમાંથી સરખી બાણુઓનાં મધ્યબિંદુઓ સુધી દોરેલી લીટીઓ સરખી હોય છે.

૧૨. સમદ્વિબાણુ ત્રિકોણના પાયાના છેડામાંથી સામી બાણુઓનાં મધ્યબિંદુઓ સુધી દોરેલી લીટીઓ સરખી હોય છે.

+ ક્રમવિરુદ્ધ સિદ્ધતા—આનો અર્થ ૧૫૪ માં પાના પર આપ્યો છે.

૧૩. સમબાણુ ત્રિકોણની મધ્યગાઓ સરખી હોય છે.

૧૪. *સમદ્વિબાણુ ત્રિકોણના સરખા ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ એક બિંદુમાં મળતાં સુધી વધારી હોય તો તે સરખી હોય છે.

૧૫. સમદ્વિબાણુ ત્રિકોણની સરખી બાણુઓને વધારી તેમને મળતાં સુધી પાયાના છેડામાંથી પાયા પર દોરેલા લંબ વધાર્યા હોય તો તે સરખા થાય છે.

૧૬. અબક ત્રિકોણમાં અબ=અક; \angle અ અને \angle કને દુભાગનારી લીટીઓ મમાં મળે છે; તો મબ, \angle બને દુભાગે છે એ સિદ્ધ કરો.

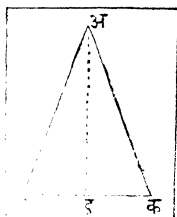
૧૭.* સમદ્વિબાણુ ત્રિકોણના ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ એકજ બિંદુમાં મળે છે.

૧૮. અબક સમબાણુ ત્રિકોણની અબ અને અક બાણુઓ પર બઅડ, કઅઈ સમબાણુ ત્રિકોણ દોરેલા છે; તો ડઅ,અઈ એકજ સીધી લીટીમાં છે એ સિદ્ધ કરો.

૧૯. અબ, એક અર્ધવર્તુળનો વ્યાસ છે; અને ષ પરિધ પર ગમે ત્યાં એક બિંદુ છે; તો અપબ ખુણો એક કાટખુણો છે એ બતાવી આપો.

પ્રમેય ૧૩.

ત્રિકોણના બે ખુણા સરખા હોય તો તે ખુણાઓની સામેની બાણુઓ સરખી હોય છે.



પક્ષ—અવક એક ત્રિકોણ છે, તેમાં $\angle વ = \angle ક$.

સાધ્ય—અક=અવ.

રચના—અવક ખુણાને દુભાગનારી લીટી દોરો, અને ધારો કે તે વકને ઢમાં મળે છે.

સિદ્ધતા—અવક અને અકક ત્રિકોણમાં—

$$\angle વ = \angle ક; \quad (\text{પક્ષ})$$

$$\angle વઅક = \angle કઅક; \quad (\text{રચના})$$

અક સાધારણ છે;

$$\therefore \triangle અવક = \triangle અકક. \quad (\text{પ્ર. ૧૧})$$

$$\therefore અવ = અક.$$

ઉપસિદ્ધાંત—સમકોણ ત્રિકોણ સમબાજુ હોય છે.

૧૩મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. ત્રિકોણના એ બહારના ખુણા સરખા હોય તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ હોય છે.

૨. સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના સરખા ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ અને પાયો એ જણ મળીને સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ કરે છે.

૩. અવક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણમાં અવ=અક અને બને કમાંથી સામી બાજુઓ પરદોરેલા લંબ ક્ષમાં મળે છે; તો ક્ષવ=ક્ષક એ સિદ્ધ કરો.

૪. અવક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણમાં અવ=અક, અને $\angle વ$ તથા $\angle ક$ ને દુભાગનારી લીટીઓ મમાં મળે છે; તો મઅ, \angle અને દુભાગે છે એ સિદ્ધ કરો.

૫. ખુણાને દુભાગનારી લીટીમાંના કોઈ પણ બિંદુમાંથી ખુણાના એક ભુજને સમાંતર એક લીટી દોરી હોય, અને તેને બીજા ભુજને મળતાં સુધી વધારી હોય, તો તેથી બનેલા ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ હોય છે.

૬. અવકક ચતુષ્કોણમાં અવ=અક, અને $\angle વ = \angle ક$; તો કવ=કક છે એમ સિદ્ધ કરો.

૭. અવક ત્રિકોણના વક પાયામાં વ, વ બિંદુઓ એવાં લીધાં છે, કે $\angle વઅવ = \angle વઅક$ છે. જો અવ=અક હોય તો અવક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે એ સિદ્ધ કરો.

૮. અવકઢ ચતુષ્કોણના અ અને વ ખુણા પહોળા છે અને સરખા પણ છે, અને અવ ॥ કઢ છે; તો અઢ ॥ વક એ સિદ્ધ કરો.

૯. અવક ત્રિકોણમાં $\angle વ = \angle ક = ૨\angle અ$, અને $\angle બ$ ને દુભાગનારી લીટી અકને ઢમાં મળે છે; તો અઢ = વઢ = વક છે એમ સિદ્ધ કરો.

૧૦. અવક સમખાણુ ત્રિકોણની વક, કઅ, અવ ખાણુઓ પર અનુક્રમે વકઢ, કઅઈ, અવફ સમખાણુ ત્રિકોણો દોર્યા છે; તો $\angle ઢ$, $\angle ઈ$, $\angle ફ$ એક સમખાણુ ત્રિકોણના ખુણા છે એ સિદ્ધ કરો.

૧૧. અવક ત્રિકોણની અવ અને અક ખાણુઓમાં ઢ અને ઈ ખિંદુઓ એવી રીતે લો, કે ઢઈ, વકને સમાંતર થાય; અને વઢની યરાયર થાય.

૧૨. અવક કાટખુણુ ત્રિકોણના અક કર્ણમાં ઢ ખિંદુ એવું લીધું છે, કે $\angle ઢકવ = \angle ઢવક$ છે; તો બતાવી આપો કે $\angle ઢક = \angle ઢવ = \angle ઢઅ$.

૧૩. * કાટખુણુ ત્રિકોણના કાટખુણાના શિરોખિંદુને કર્ણના મધ્યખિંદુ સાથે સાંધનારી લીટી કર્ણના અર્ધ યરાયર હોય છે, એ કિપલા પ્રશ્નને આધારે સિદ્ધ કરો.

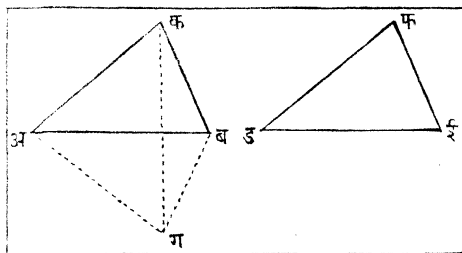
૧૪. * કાટખુણુ ત્રિકોણમાં પાયાની સામેના શિરોખિંદુમાંથી પાયાના મધ્યખિંદુ સુધી દોરેલી લીટી શિરોખિંદુ આગળના ખુણાને દુભાગે, તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિખાણુ હોય છે.

૧૫. અવક ત્રિકોણના વક પાયામાં (જરૂર પડે તો પાંચો વધારીને) એવું એક ખિંદુ લો, કે તેનું અ અને કથી અંતર સરખું હોય.

૧૬. આપેલી લીટીમાં એક અ ખિંદુ છે, અને તે લીટીની બહાર એક વ ખિંદુ છે; તો આપેલી લીટીમાં એવું એક ક ખિંદુ શોધી કાઢો, કે (૧) વક અને કઅનો સરવાળો એક આપેલી લીટીથી મોટો થાય; (૨) વક અને કઅની બાદબાકી એક આપેલી લીટી યરાયર થાય.

પ્રમેય ૧૪.

જો એક ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓ બીજા ત્રિકોણની ત્રણ બાજુની બરાબર હોય, તો તે ત્રિકોણો એકરૂપ હોય છે.



પક્ષ—અવક અને ડઈફ ત્રિકોણોમાં અવ=ડઈ. અક=ડફ, વક=ઈફ.

સાધ્ય— \triangle અવક \equiv \triangle ડઈફ.

સિદ્ધતા—

ધારો કે સૌથી મોટી બાજુ અવ છે.

\triangle ડઈફ ઉપાડીને એવી રીતે મૂકો, કે તેનું ડ શિરોબિંદુ અ પર પડે, ડઈ પાંચો અવની દિશામાં પડે, અને ફ શિરોબિંદુ કથી વિરુદ્ધ દિશામાં પડે.

\therefore અવ=ડઈ, (પક્ષ)

\therefore ઈ, વ પર પડે.

ધારો કે ફ શિરોબિંદુ ગ સ્થાનમાં પડે છે.

ક, ગ સાંધો.

હવે \therefore અક=ડફ, અને ડફ=અગ, (પક્ષ અને રચના)

\therefore અક=અગ.

\therefore \angle અકગ $=$ \angle અગક. (પ. ૧૨)

અને \therefore $\text{વક}=\text{ઈફ}$, અને $\text{ઈફ}=\text{વગ}$, (૫૧ અને ૨૫ના)

\therefore $\text{વક}=\text{વગ}$.

$\therefore \angle \text{વકગ} = \angle \text{વગઠ}$. (૫. ૧૨)

$\therefore \angle \text{અકમ} + \angle \text{વકગ} = \angle \text{અગક} + \angle \text{વગક}$.

$\therefore \angle \text{અકવ} = \angle \text{અગવ}$.

પણ $\angle \text{અગવ}$ એટલે $\angle \text{ડફઈ}$ છે,

$\therefore \angle \text{અકવ} = \angle \text{ડફઈ}$.

હવે \therefore અવક અને ડઈફ ત્રિકોણોમાં—

$\text{અક}=\text{ડફ}$, (૫૧)

$\text{કવ}=\text{ફઈ}$, (૫૧)

$\angle \text{અકવ} = \angle \text{ડફઈ}$;

$\therefore \triangle \text{અવક} = \triangle \text{ડઈફ}$. (૫-૧૦)

૧૪મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. અવકઠ ચતુષ્કોણમાં અવ=અઠ; કવ=કઠ; તો અક ઇર્ણ $\angle \text{અ}$ અને $\angle \text{કને}$ દુભાગે છે એ સિદ્ધ કરો.

૨. * ચતુષ્કોણની સામસામી બાજુઓ સરખી હોય, તો તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોય છે.

૩. અવક ત્રિકોણની અવ અને અક બાજુઓ સરખી છે, અને વક પર વકઠ ત્રિકોણ એવો દોર્યો છે, કે વઠ=કઠ; તો અઠ, $\angle \text{વઅકને}$ દુભાગે છે એમ બતાવી આપો.

૪. ક્ષયજ સમઘિબાજુ ત્રિકોણના વ અને જ આ સરખા બાજુને દુભાગનારી લીટીઓ મમાં મળે છે, તો બતાવી આપો કે મક્ષ, $\angle \text{ક્ષને}$ દુભાગે છે.

૫. અવ પાયાની સામસામી બાજુએ અવક અને અવઠ આ બે સમઘિબાજુ ત્રિકોણ છે; તો બતાવી આપો કે કઠ, અવને કાટબુજે દુભાગે છે.

૬. ઢઅની એકજ બાજુએ ઈંડઅ અને ફઠઅ આ બે સમઘિબાજુ ત્રિકોણ છે; તો બતાવી આપો કે ઈફ વધારી હોય તો તે ઢઅને કાટબુજે દુભાગે.

૭. અવકટ ચતુષ્કોણમાં અડ=વક છે, અને અક અને વક કોણો સરખા છે, તો \angle અકડ = \angle વકડ છે એમ સિદ્ધ કરો.

૮. *સમબાણુ ચતુષ્કોણના કોણો તે ચતુષ્કોણના સર્વ ખુણાને હુલાગે છે, અને એક બીજાને કાટખુણું હુલાગે છે.

૯. અમલ અને કમલ આ સીધી લીટીએ એક બીજાને છેદે છે, અને અમકઈ તથા કમલક એ સમબાણુ ચતુષ્કોણો છે; તો બતાવી આપો કે ર્ફ લીટી મમાં થઈને જાય છે, અને અક, વકને સમાંતર છે.

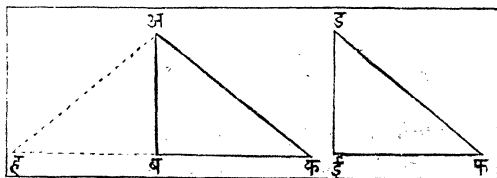
૧૦. અવક, અવડ ત્રિકોણો અવની એકજ બાણુએ છે. અક=વક, અડ=વક, અને અડ તથા વક, મમાં મળે છે; તો મઅક અને મવક ત્રિકોણો એકરૂપ છે એ સિદ્ધ કરો.

૧૧. *ત્રિકોણની બાણુઓને હુલાગનારા લંબ એકજ બિંદુમાં મળે છે.

૧૨. કોઈ પણ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓમાંથી સામી બાણુઓ પર દોરેલા લંબ એકજ બિંદુમાં મળે છે. (કિપલા ૧૧મા પ્રશ્ન અને ૧૧મા પ્રમેય પરના ૧૮મા પ્રશ્નને આધારે આ સિદ્ધ કરો.)

પ્રમેય ૧૫.

જો કોઈ કાટખુણુ ત્રિકોણનો કોણ અને એક બાણુ અનુક્રમે બીજા કાટખુણુ ત્રિકોણના કોણ અને એક બાણુની બરાબર હોય, તો તે બે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.



પક્ષ—અવક અને ડર્ફ બે કાટખુણુ ત્રિકોણ છે; તેમના અક અને ડક કોણો સરખા છે, અને અવ=ડર્ફ છે.

સાધ્ય— \triangle અવક = \triangle ડર્ફ.

સિદ્ધતા—:: અવ=હૈ, (પક્ષ)

∴ \triangle હૈફ એવી રીતે મૂકી શકાય કે હ, અ પર પડે; હૈ, અ પર પડે; અને ફ, કની વિરુદ્ધ દિશામાં પડે. ધારે કે ફ,હ આગળ પડે છે.

હવે ∴ \angle અવક=૧ કાટખુણો, અને \angle અવહ=૧કાટખુણો; (પક્ષ)

∴ \angle અવક+ \angle અવહ=૨ કાટખુણો.

∴ હવક એક સીધી લીટી છે. (પ્ર. ૨)

∴ અહક ત્રિકોણમાં અક=અહ,

∴ \angle અકવ= \angle અહવ; (પ. ૧૨)

પણ \angle અહવ એટલે \angle હફહૈ છે.

∴ \angle અકવ= \angle હફહૈ.

હવે અવક, હૈફ ત્રિકોણોમાં—

\angle વ= \angle હૈ; (પક્ષ)

\angle ક= \angle ફ; (ઉપર સિદ્ધ કર્યો છે.)

અવ=હૈ, (પક્ષ)

∴ \triangle અવક \equiv \triangle હૈફ. (પ્ર. ૧૧)

૧૫મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. * ખુણાના બંને બુજેથી સરખે અંતરે આવેલું કોઈ પણ બિંદુ તે ખુણાને દુભાગનારી લીટીમાં હોય છે.

૨. અવક ત્રિકોણમાં અવ=અક; અને અહ, વક પર લંબ છે; તો \triangle અવહ \equiv \triangle અકહ.

૩. જો ત્રિકોણના પાયાના મધ્યબિંદુમાંથી બાકીની બાજુઓ પર દોરેલા લંબ સરખા હોય, તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ હોય છે.

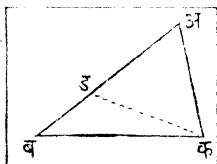
૪.* જો ત્રિકોણના બે ખુણાનાં શિરોબિંદુઓમાંથી સામી બાજુઓ પર દોરેલા લંબ સરખા હોય, તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ હોય છે.

૫.* અવક ત્રિકોણના વ અને ક ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ મમાં મળે છે; તો બતાવી આપો કે અમ, અ ખુણાને દુભાગે છે. (એટલે ત્રિકોણના ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ એકબી બિંદુમાં મળે છે એ સિદ્ધ કરો.)

૬, અવક ત્રિકોણની અવ, અક બાજુઓ વધારવાથી બનેલા બહારના ખુણા \angle અને કને દુભાગનારી લીટીઓ મમાં મળે છે; તે અમ, \angle અવકને દુભાગે છે એમ બતાવી આપો.

પ્રમેય ૧૬.

જો ત્રિકોણની બે બાજુઓ નાની મોટી હોય, તો મોટી બાજુની સામેના ખુણા મોટો હોય છે.



પક્ષ—અવક એક ત્રિકોણ છે, તેમાં અવ > અક.

સાધ્ય— \angle ક > \angle વ.

રચના—અવમાંથી અક જેવડો અડ કકડો કાપી કાઢો. ડક સાંધો.

સિદ્ધતા—

\therefore અડક ત્રિકોણમાં અડ = અક, (રચના)

$\therefore \angle$ અડક = \angle અકડ. (પ્ર. ૧૨)

$\therefore \angle$ અડક એ અડક ત્રિકોણનો બહારનો ખુણો છે;

$\therefore \angle$ અડક > \angle વ, (પ્ર. ૮, ઉપ. ૩)

પણ \angle અડક = \angle અકડ.

$\therefore \angle$ અકડ > \angle વ.

અને $\therefore \angle$ ક > \angle અકડ,

$\therefore \angle$ ક > \angle વ.

૧૬મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. ૧૬મા પ્રમેયની આકૃતિમાં (૧) કડ, \angle અને દુભાગનારી લીટી પર લંબ છે; (૨) \angle અકવ = $\frac{1}{2} (\angle$ ક - \angle વ); અને (૩) \angle અકડ = $\frac{1}{2} (\angle$ વ + \angle ક); એમ સિદ્ધ કરી બતાવો.

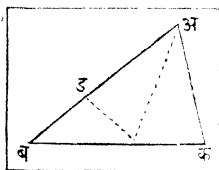
૨. અવકલ સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણમાં અવ > અક; તો \angle અકવ > \angle અક એ સિદ્ધ કરો.

૩. એક ચતુષ્કોણની અવ, વક, કક, કઅ બાણુઓ જે અનુક્રમે નાની થતી જાય, તો \angle કકઅ > \angle કઅઅ, એ બતાવી આપો.

૪. * ત્રિકોણની સૌથી મોટી બાણુની પાસેના ખુણા હંમેશાં સાંકડા હોય છે.

૫. અવકલ ચતુષ્કોણની સૌથી નાની બાણુ અવ છે, અને કક સૌથી મોટી છે; તો \angle વ > \angle ક અને \angle અ > \angle ક છે એમ સિદ્ધ કરી બતાવો.

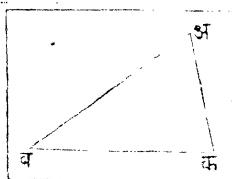
૬. પાસેની આકૃતિમાં આપેલા અવક ત્રિકોણનો અ ખુણો દુભાગો અને અકની બરાબર અક બાગ કાપી કાઢો; અને એ આકૃતિની મદદથી ૧૬મો પ્રમેય સિદ્ધ કરો.



૭. ત્રિકોણની એક બાણુ બીજીથી મોટી હોય, તો ત્રિકોણના શિરોબિંદુને પાયાના મધ્યબિંદુ સાથે સાંધનારી લીટી, ત્રિકોણની મોટી બાણુ પાયાની સામેનો ખુણો દુભાગનારી લીટી એ બેની વચ્ચે હોય છે.

પ્રમેય ૧૭.

ત્રિકોણના બે ખુણા નાના મોટા હોય, તો મોટા ખુણાની સામેની બાણુ (નાના ખુણાની સામેની બાણુ કરતાં) મોટી હોય છે.



પક્ષ—અવક ત્રિકોણમાં $\angle ક > \angle વ$.

સાધ્ય—અવ $>$ અક.

સિદ્ધતા—

જો અવ, અકથી મોટી ન હોય, તો તે અકની બરાબર કે તેથી નાની હોવી જોઈએ.

બરાબર હોય તો $\angle વ = \angle ક$. (પ્ર. ૧૨)

નાની હોય તો $\angle ક < \angle વ$. (પ્ર. ૧૬)

પણ આ બંને બાબતો પક્ષની વિરુદ્ધ છે;

\therefore અવ $>$ અક.

ઉપસિદ્ધાંત—ત્રિકોણમાંના સૌથી મોટા ખુણાની સામેની બાજુ સૌથી મોટી હોય છે, અને સૌથી નાના ખુણાની સામેની બાજુ સૌથી નાની હોય છે.

ઉપલા પ્રમેયની સિદ્ધતા એ ક્રમવિરુદ્ધ સિદ્ધતાનું ઉદાહરણ છે.

પ્રમેયના સાધ્યમાંની બાબત ખોટી છે એમ ધારવાથી પક્ષ સાથે અથવા પહેલાં સિદ્ધ કરેલી બાબતો સાથે વિરોધ આવે છે, એમ બતાવવું, તેને ક્રમવિરુદ્ધ સિદ્ધતા કહે છે.

ઉપલા પ્રમેયની ક્રમિક સિદ્ધતા નીચેની રચના કરીને આપી શકાય છે:—

અવને છેદનારી કક્ષ લીટી એવી દોરો, કે $\angle વકક્ષ = \frac{1}{2} (\angle ક - \angle વ)$ થાય.

પછી અક્ષ = અક છે એમ બતાવી આપો.

૧૭મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. * કાટખુણુ ત્રિકોણનો કયું સર્વ બાજુઓથી મોટા હોય છે.

૨. * પહોળાખુણુ ત્રિકોણમાં પહોળા ખુણાની સામેની બાજુ સૌથી મોટી હોય છે.

૩. અવક ત્રિકોણના પાયાની સામેના અ શિરોગિંદુમાંથી વક પર અડ લંબ દોર્યો હોય, તો બતાવી આપો કે અવ $>$ વક, અને અક $>$ વક છે; અને આ પરથી (અવ+અક) $>$ વક છે એમ પણ બતાવી આપો.

૪. અવક ત્રિકોણના વ અને ક ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ ઢમાં મળે છે, અને અવ $>$ અક; વક $>$ વક એ સિદ્ધ કરો.

૫. અવક ત્રિકોણનાં બ અને ક શિરોબિંદુઓમાંથી સામી બાજુઓ પર દોરેલા લંબો ક્ષ બિંદુમાં મળે છે. હવે જો અવ > અક હોય, તો ક્ષ > ક્ષક એમ બતાવી આપો.

૬. ત્રિકોણની અવ, અક બાજુઓ વધારવાથી થતા બહારના ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ ફ બિંદુમાં મળે છે. હવે જો અવ > અક, તો ફ < ફક એ સિદ્ધ કરો.

૭. અવક ત્રિકોણની અવ, અક સરખી બાજુઓ છે; અને તેમને એક લીટી ક્ષ અને ચ બિંદુઓમાં છેદે છે. વક પાયાને ક તરફ વધાર્યો હોય, તો તેને પણ તે લીટી મળે છે; તો બતાવો કે અચ > અક્ષ.

૮. * સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણનો પાયો વધારીને તેમાંના કોઈ પણ બિંદુ સુધી પાયાની સામેના શિરોબિંદુમાંથી દોરેલી લીટી દરેક સરખી બાજુથી મેટી હોય છે.

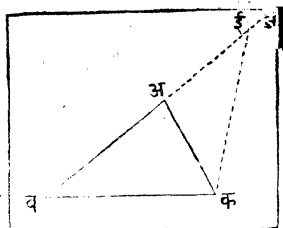
૯. * સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાની સામેના શિરોબિંદુમાંથી પાયાના કોઈ પણ બિંદુ સુધી દોરેલી લીટી દરેક સરખી બાજુથી નાની હોય છે.

૧૦. * ત્રિકોણના કોઈ પણ ખુણાને દુભાગનારી લીટીથી સામી બાજુના જો એ ભાગ થાય છે, તેમાંના દરેક ભાગ તેની પાસેની ત્રિકોણની બાજુથી નાનો હોય છે.

૧૧. * આપેલા બિંદુમાંથી આપેલી લીટી પર ફક્ત એજ સરખી લીટીઓ દોરી શકાય છે.

પ્રમેય ૧૮.

ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુઓના સરવાળો ત્રીજી બાજુ કરતાં વધારે હોય છે.



પક્ષ—અવક એક ત્રિકોણ છે.

સાધ્ય—(૧) (વઅ+અક) > વક;

(૨) (કવ+વઅ) > કઅ; અને

(૩) (અક+કવ) > અવ.

રચના—વઅને હ મુધી વધારો. અહમાંથી અક નેવડો અઈ કઢડો કાપી કાઢો. કઈ સાંધો.

સિદ્ધતા—

∴ અઈક ત્રિકોણમાં અઈ=અક, (રચના)

∴ ∠અકઈ=∠અઈક. (પ્ર. ૧૨)

પણ ∠વકઈ > ∠અકઈ,

∴ ∠વકઈ > ∠અઈક.

હવે રૂઢક ત્રિકોણમાં ∴ ∠વકઈ > ∠અઈક,

∴ વઈ > વક. (પ્ર. ૧૭)

એટલે (વઅ+અઈ) > વક.

પણ અઈ=અક, (રચના)

∴ (વઅ+અક) > વક.

એજ રીતે (કવ+વઅ) > કઅ, અને (અક+કવ) > અવ, એ સિદ્ધ કરી શકાય.

ઉપસિદ્ધાંત—કોઈ પણ ત્રિકોણની બે બાજુની બાદબાકી ત્રીજી બાજુથી ઓછી હોય છે.

સિદ્ધતા—

(અવ+અક) > વક. (પ્ર. ૧૮)

દરેક બાજુમાંથી અક બાદ કરો.

∴ અવ > (વક-અક).

૧૮મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. અ ખુણા દુબાગીને ૧૮મો પ્રમેય સિદ્ધ કરો.

૨. ચતુષ્કોણની કોઈ પણ ત્રણ બાજુનો સરવાળો ચોથી બાજુથી વધારે હોય છે.

૩. બહુકોણની કોઈ પણ એક બાજુ બાકીની બધી બાજુઓના સરવાળા કરતાં ઓછી હોય છે.

૪. * ચતુષ્કોણના કોણોનો સરવાળો તેની પરિમિતિ કરતાં ઓછો હોય છે.

૫. * કોઈ પણ બિંદુમાંથી ત્રિકોણનાં ત્રણે શિરોબિંદુ સુધી દોરેલી લીટીઓનો સરવાળો ત્રિકોણની પરિમિતિના અર્ધ કરતાં વધારે હોય છે.

૬. કોઈ પણ બિંદુમાંથી બહુકોણનાં સર્વ શિરોબિંદુ સુધી દોરેલી લીટીઓનો સરવાળો તે બહુકોણની પરિમિતિના અર્ધ કરતાં વધારે હોય છે.

૭. અથવા ત્રિકોણમાં Δ બિંદુ એવું લીધું છે, કે Δ અડ=અથ છે; અથવા ખુણાને દુભાગનારી લીટી વકને Δ માં મળે છે; તો Δ અડ=અથ છે એમ બતાવી આપો, અને તે ઉપરથી Δ અડ > Δ અથ છે એમ સિદ્ધ કરો.

૮. અથવા ત્રિકોણની અક બાજુમાં ગમે ત્યાં એક Δ બિંદુ છે; તો બતાવી આપો કે Δ અથ+અક > Δ અડ+અક.

૯. અથવા ત્રિકોણમાં ગમે ત્યાં એક Δ બિંદુ છે; તો બતાવી આપો કે Δ અથ+અક > Δ અડ+અક.

૧૦. * વર્તુળની કોઈ પણ બિંદુ બિંદુઓ વચ્ચેની નાની હોય છે.

૧૧. અક પાયા પર અથવા ત્રિકોણ અને અપચક ચતુષ્કોણ છે; Δ બિંદુઓ ત્રિકોણની અંદર છે; તો ત્રિકોણની પરિમિતિ ચતુષ્કોણની પરિમિતિથી મોટી છે એમ બતાવી આપો.

૧૨. ત્રિકોણના પાયાની સામેના શિરોબિંદુમાંથી પાયા પર દોરેલી મધ્યગા અને પાયાનું અર્ધ એ બેનો સરવાળો, પાયાની સામેના ખુણા કરનારી બે બાજુના સરવાળાના અર્ધ કરતાં વધારે હોય છે.

૧૩. * ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુઓનો સરવાળો, તે બે બાજુઓના મેલનબિંદુમાંથી દોરેલી મધ્યગાની બમણાઈ કરતાં વધારે હોય છે.

૧૪. * કોઈ પણ ત્રિકોણની ત્રણ મધ્યગાઓનો સરવાળો ત્રિકોણની પરિમિતિ કરતાં ઓછો હોય છે.

૧૫. * કોઈ પણ ત્રિકોણની પરિમિતિ ત્રણ મધ્યગાઓના સરવાળાની બમણાઈ કરતાં ઓછી હોય છે.

૧૬. અથવા ચતુષ્કોણની અંદર મ એક બિંદુ છે; તો બતાવી આપો કે $(મમ+મથ+મક+મડ) > (અક+અથ)$.

૧૭. * ત્રિકોણમાંના કોઈ પણ બિંદુમાંથી તે ત્રિકોણનાં ત્રણે શિરોબિંદુઓ સુધી દોરેલી સીધી લીટીઓનો સરવાળો (૧) ત્રિકોણની પરિમિતિના અર્ધ કરતાં વધારે હોય છે; પણ (૨) પરિમિતિ કરતાં ઓછો હોય છે, એમ બતાવી આપો.

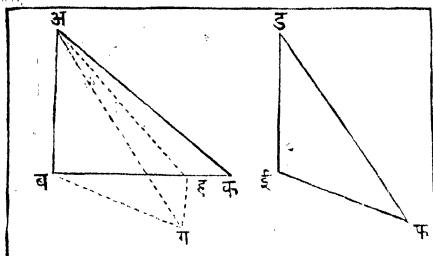
૧૮. ચતુષ્કોણના કોણોનો સરવાળો ચતુષ્કોણની પરિમિતિના અર્ધ કરતાં વધારે હોય છે.

૧૯. અથવા ત્રિકોણમાં ચક્રનું મધ્યબિંદુ હ છે; જો અઢ < અઢ, તો \angle અ પહોળો ખુણો છે એ બતાવી આપો.

૨૦. જો એક ત્રિકોણ બીજા ત્રિકોણની અંદર પુરેપુરી રીતે મૂકી શકાતો હોય, તો પહોળાની પરિમિતિ બીજાની પરિમિતિ કરતાં ઓછી હોય છે.

પ્રમેય ૧૯.

જો ત્રિકોણ પૈકી એકની બે બાજુઓ અનુક્રમે બીજાની બે બાજુઓની બરાબર હોય, પણ તે બાજુઓની વચ્ચેના ખુણા નાના મોટા હોય; તો જે ત્રિકોણમાંના ખુણો મોટા હોય, તે ત્રિકોણનો પાયા નાના ખુણાવાળા ત્રિકોણના પાયા કરતાં મોટો હોય છે.



પક્ષ—અથવા અને ડઈફ એ બે ત્રિકોણમાં અથ=ડઈ,
અથ=ડઈ, અને \angle અ \angle ડ.
સાધ્ય—અથ > ડઈ.

સિદ્ધતા—

∴ ડઈ=અવ,

∴ ડઈ, અવ પર યરાયર આવી રહેશે.

ડઈફ ત્રિકોણ એવી રીતે મૂકેા, કે ડ અને ઈ િંદુઓ અ અને વ પર પડે; અને અબની જે યાણુએ ક શિરોિંદુ છે તેજ યાણુએ ફ શિરોિંદુ પડે. ધારો કે ફ, ગ આગળ પડે છે.

હવે ∴ \angle વઅક $>$ \angle વઅગ, (પક્ષ)

∴ અગ (ડફ), અવ અને અકની વચ્ચે પડે છે.

\angle વઅકમાંથી \angle વઅગ (\angle ઈડફ) યાદ જતાં યાકી રહેલા \angle કઅગને દુભાગેા, અને દુભાગનારી લીટીને હ િંદુમાં વક્તન મળવા દેા. હગ સાધેા.

∴ અગહ અને અકહ ત્રિકોણોમાં—

અગ=અક, (પક્ષ)

અહ અને ત્રિકોણમાં સાધારણ છે,

અને \angle ગઅહ= \angle કઅહ; (રચના)

∴ બે ત્રિકોણ એકરૂપ છે. (પ્ર. ૧૦)

∴ હગ = હક.

આ દરેકમાં વહ ઉમેરેા.

∴ વહ+હગ=વહ+હક (એટલે વક્તની યરાયર.)

હવે વહગ ત્રિકોણમાં—

∴ વહ+હગ $>$ વગ; (પ્ર. ૧૮)

અને વહ+હગ=વક;

∴ વક $>$ વગ.

પણ વગ એટલે ઈફજ;

∴ વક $>$ ઈફ.

૧૯મા પમેય પરના પ્રશ્ન.

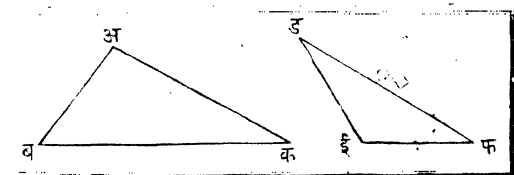
૧. અવકડ એક ચતુષ્કોણ છે, તેમાં અંડ=વક, અને \angle અડક $>$ \angle વકડ; તો બતાવી યાપો કે અક $>$ વડ.

૨. અવક ત્રિકોણની અવ અને અક બાજુઓને અનુક્રમે ઢ અને ઈ સુધી વધારીને વઢ=કઈ કરેલી છે. હવે જો અવ > અક હોય, તો બતાવો કે કઢ > વઈ.

૩. અવક ત્રિકોણની વઝ અને કઝ બાજુઓને વધારીને વઢ અને કઈ સરખી કરી છે. હવે જો અવ > અક હોય, તો બતાવી આપો કે વઈ > કઢ.

પ્રમેય ૨૦.

જો ત્રિકોણ પૈકી એકની બે બાજુઓ અનુક્રમે બીજાની બે બાજુઓની બરાબર હોય, પરંતુ તેમના પાયા નાના મોટા હોય, તો જે ત્રિકોણનો પાયા મોટો હોય તેનો તે પાયાની સામેના ખુણા, જેનો પાયા નાનો છે તેના પાયાની સામેના ખુણા કરતાં મોટો છે.



પક્ષ—અવક અને ડઈફ ત્રિકોણોમાં અવ=ડઈ, અક=ફ, અને વક > ઈફ.

સાધ્ય— $\angle અ > \angle ડ$.

સિદ્ધતા—

જો $\angle અ > \angle ડ$ ન હોય, તો $\angle અ = \angle ડ$ હોવો જોઈએ, અથવા $\angle અ < \angle ડ$ હોવો જોઈએ.

હવે $\angle અ = \angle ડ$ હોય, તો

વક = ઈફ,

(પ્ર. ૧૦)

અને $\angle અ < \angle ડ$ હોય, તો

વક < ઈફ.

(પ્ર. ૧૯)

પણ આ બંને બાબતો પક્ષથી વિરુદ્ધ છે,
એટલે \angle અ, \angle કની બરાબર પણ નથી અને તેથી નાનો
પણ નથી.

$\therefore \angle$ અ $>$ \angle ક.

૨૦મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. અવક ત્રિકોણમાં અવ $>$ અક; વક, કમાં દુભાગેલી છે;
તો અકક સાંકડો ખુલ્લો છે એમ બતાવી આપો.

૨. અવક ત્રિકોણની વક બાજુનું ક મધ્યબિંદુ છે. અકમાં
ગમે ત્યાં ઈ બિંદુ લીધેલું છે; તો એમ બતાવો કે જો અવ $>$ અક
હોય, તો ઈવ $>$ ઈક છે.

૩. અવક ત્રિકોણની વઅ, કઅ બાજુઓમાંથી વક, કઈ સરખા
કકડા કાપી કાઢ્યા છે. હવે જો વઈ $>$ કક હોય, તો અવ $>$ અક
છે એમ બતાવી આપો.

૪. અવકક ચતુષ્કોણમાં વક=વક. હવે એમ બતાવી આપો કે જો

(૧) અક $>$ વક હોય, તો \angle અકક $>$ \angle વકક;

(૨) અવ $<$ કક હોય, તો \angle અવક $<$ \angle કઅક;

(૩) \angle અકક $>$ \angle વકક હોય, તો \angle અવક $>$ \angle વઅક.

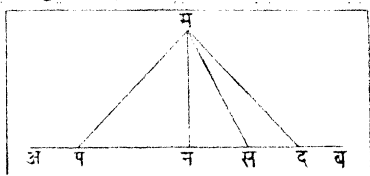
પ્રમેય ૨૧.

આપેલી લીટીની બહારના બિંદુમાંથી તે લીટી પર જે
લીટીઓ દારી શકાય તે પૈકી—

(૧) લંબ સૌથી નાની લીટી હોય છે,

(૨) લંબની સાથે સરખા ખુલ્લા કરનારી લીટીઓ સરખી
હોય છે, અને

(૩) લંબની સાથે મોટા ખુલ્લા કરનારી લીટી, નાના
ખુલ્લા કરનારી લીટી કરતાં મોટી હોય છે.



પક્ષ—અવ આપેલી લીટી છે. તે લીટીની બહાર મ આપેલું બિંદુ છે.

(૧) મન, અવ પર લંબ છે; અને મપ, અવને પમાં મળનારી લીટી છે. (૨) $\angle નમપ = \angle નમદ$. (૩) $\angle નમપ > \angle નમસ$.

સાધ્ય—(૧) મન સૌથી નાની લીટી છે.

સિદ્ધતા—

\therefore મપન ત્રિકોણની પન બાજુ વ મુધી વધારી છે,

$\therefore \angle મનવ > \angle મપન$. (પ્ર. ૮, ૬. સિ. ૩)

અને $\angle મનવ = ૧$ કાટખુણો (અને તેટલા માટે) =

$\angle મનપ$,

$\therefore \angle મનપ > \angle મપન$.

$\therefore મપ > મન$. (પ્ર. ૧૭)

એજ રીતે મમાંથી અવ મુધી દોરેલી બીજી દ્રાઈ પણ લીટી કરતાં મન નાની છે એમ સિદ્ધ કરી શકાયે.

સાધ્ય—(૨) મપ = મદ.

સિદ્ધતા—

\therefore મપન, મદન ત્રિકોણોમાં—

$$\left. \begin{aligned} \angle મનપ &= \angle મનદ, \\ \angle નમપ &= \angle નમદ, \end{aligned} \right\} \quad (પક્ષ)$$

મન બાજુ અને ત્રિકોણમાં સાધારણ છે;

$\therefore મપ = મદ$. (પ્ર. ૧૧)

સાધ્ય—(૩) મપ $>$ મસ.

સિદ્ધતા—

∴ મદસ ત્રિકોણની દસ બાજુ ૫ મુધી વધારી છે,
 ∴ \angle મસપ $>$ \angle મદપ. (પ્ર. ૮, ઉ. ૩)

અને ∴ મપ=મદ,
 ∴ \angle મદપ= \angle મપદ (= \angle મપસ.) (પ્ર. ૧૨)
 ∴ \angle મસપ $>$ \angle મપસ;
 ∴ મપ $>$ મસ. (પ્ર. ૧૭)

ઉપસિદ્ધાંત ૧—લીટીની બહારના કોઈ પણ બિંદુમાંથી તે લીટી મુધી બેજ સરખી લીટીઓ દ્વારી શકાય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૨—કોઈ પણ બિંદુમાંથી કોઈ પણ લીટી મુધી જે લીટીઓ દ્વારી શકાય તે પૈકી સૌથી નાની લીટી તે લીટી પર લંબ હોય છે.

૨૧મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

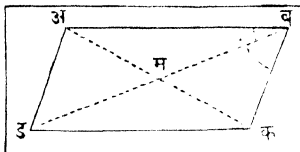
૧. * એક ત્રિકોણની બે બાજુઓ અને તે પૈકી એક બાજુની સામેના ખુણા-એટલા અવયવો બાજુ ત્રિકોણના એમને મળતા અવયવોની બરાબર હોય, તો તે ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે; અથવા તે ત્રિકોણની સરખી બાજુઓની સામેના ખુણા ન્યૂનતાપૂરક હોય છે.

૨. ઉપલા પ્રશ્નમાં એમ બતાવી આપો, કે આપલા સરખા ખુણા પડેળા હોય, તો બંને ત્રિકોણ એકરૂપ હોય છે.

પ્રમેય ૨૨.

સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણમાં—

- (૧) સામસામા ખુણા સરખા હોય છે;
- (૨) સામસામી બાજુઓ સરખી હોય છે;
- (૩) દરેક કર્ણ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણને દુભાગે છે; અને
- (૪) બંને કર્ણ એકબીજાને દુભાગે છે.



પક્ષ-અવકાશ સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણ છે. અક, વક તેના કર્ણ છે.

સાધ્ય—(૧) $\angle અ = \angle ક$, અને $\angle વ = \angle ડ$.

(૨) અડ=વક અને અવ=ડક.

(૩) અક અને વક કર્ણો અવકાશ સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણને દુભાગે છે;

(૪) અક અને વક કર્ણો એક બીજાને સમાં દુભાગે છે.

સિદ્ધતા—(૧)

\therefore અડ ॥ વક, અને તેમને વડ મળે છે,

$\therefore \angle કવડ = \angle અડવ$. (પ. ૬)

તેમજ \therefore અવ ॥ ડક, અને ડવ તેમને મળે છે,

$\therefore \angle અવડ = \angle કડવ$. (પ. ૬)

$\therefore \angle અવડ + \angle કવડ = \angle કડવ + \angle અડવ$.

$\therefore \angle ડ = \angle વ$.

એજ રીતે $\angle અ = \angle ક$ છે એમ બતાવી શકાશે.

(૨)

\therefore અવડ, કડવ ત્રિકોણોમાં—

$\angle અડવ = \angle કવડ$;

$\angle અવડ = \angle કડવ$;

અને વડ બંને ત્રિકોણોમાં સાધારણ છે;

$\therefore \triangle અવડ \equiv \triangle કડવ$. (પ. ૧૧)

\therefore અડ=વક, અને અવ=ડક.

(૩)

$\therefore \triangle અવડ \equiv \triangle કડવ$, (ઉપર સિદ્ધ કર્યું છે.)

\therefore વડ કર્ણથી અવકાશ સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણના બે સરખા ભાગ થયા છે. તેમજ $\triangle અડક \equiv \triangle અવક$ એમ બતાવી શકાશે.

(૪)

$\therefore \triangle મઅડ$ અને $\triangle મકવમાં$ —

$\angle અડમ = \angle કવમ$,

(પ. ૬)

\angle અમડ= \angle કમઘ,

(પ્ર. ૩)

અડ=ઘક,

$\therefore \triangle$ અમડ $\equiv \triangle$ ઘમક.

(પ્ર. ૧૧)

\therefore મઅ=મક, અને મડ=મઘ.

એટલે, અક અને ઘડ કણો એક બીજાને મમાં દુભાગે છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૧—સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેનું અંતર (લંબાંતર) બધે ઠેકાણે સરખું હોય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૨—સમાંતરબાળુ ચતુષ્કોણના એક ખુણા કાટખુણો હોય, તો બાકીના બધા ખુણા કાટખુણા હોય છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૩—સમાંતરબાળુ ચતુષ્કોણની પાસપાસેની કોઈ પણ બે બાળુઓ સરખી હોય, તો સર્વ બાળુઓ સરખી હોય છે.

૨૨મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. * સમાંતરબાળુ ચતુષ્કોણના પાસપાસેના બે ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ એક બીજા સાથે કાટખુણો કરે છે.

૨. * સમાંતરબાળુ ચતુષ્કોણના સામસામા ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ સમાંતર હોય છે.

૩. * સમાંતરબાળુ ચતુષ્કોણના કણોના છેદનબિંદુમાંથી સામસામા બાળુ સુધી દોરેલી કોઈ પણ લીટીના તે બિંદુમાં સરખા ભાગ થાય છે.

૪. અઘકઘ ચતુષ્કોણમાં ઘક=અડ છે, પણ તેઓ સમાંતર નથી; અને અઘ || ઘક છે; તો \angle ક= \angle ઘ એમ બતાવી આપો.

૫. ઉપલા પ્રશ્નની આકૃતિમાં જો \angle ઈ અને \angle ફ અનુક્રમે અઘ અને ઘકનાં મધ્યબિંદુ હોય, તો \angle ઈફ, અઘ પર લંબ છે એમ બતાવી આપો.

૬. * સમાંતરબાળુ ચતુષ્કોણનો દરેક કણ સામાં શિરોબિંદુઓથી સરખે અંતરે હોય છે.

૭. એક ચતુષ્કોણની બે બાળુઓ સમાંતર છે, અને બીજી બે બાળુઓ સરખી છે; તો તેમાંના કોઈ પણ ખુણો સામા ખુણાની બરાબર છે અથવા તેનો ન્યૂનતાપૂરક છે એમ બતાવી આપો.

૮. * જે સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણના કણો સરખા હોય છે તે કાટખુણુ ચતુષ્કોણ હોય છે.

૯. જે સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણના કણો એક બીજા પર લંબ હોય છે, તેની સર્વ બાણુઓ સરખી હોય છે.

૧૦. જે સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણના કણો સમાન હોઈને એક બીજા પર લંબ હોય, તો તે ચોરસ હોય છે.

૧૧. અથ પાયા પર અને તેની વિરુદ્ધ બાણુએ અથકક, અથઈફ સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણ એવા દોર્યા, કે પહેલાની અડ બાણુ બીજાના અઈ કણુ બરાબર છે, અને પહેલાનો અક કણુ બીજાની અફ બાણુ બરાબર છે; તો એમ સિદ્ધ કરો કે:—

(૧) ક, અ, ફ બિંદુઓ } એકજ સીધી લીટીમાં છે.
અને (૨) ઢ, અ, ઈ બિંદુઓ }

૧૨. અથકક સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણના અક કણુમાં ઈ બિંદુ એવું લીધું છે, કે ઈથ=ઈઢ છે; તો ઈ, અકનું મધ્યબિંદુ છે એમ બતાવી આપો. આનો કોઈ અપવાદ હોય તો કહો.

૧૩. અથક ત્રિકોણની થક બાણુમાં ઈ અને ફ બે બિંદુઓ લો. અથમાં વ બિંદુ અને અકમાં ઢ બિંદુ કેવી રીતે લીધાં હોય, તો પદ લીટી ઈફની બરાબર અને તેને સમાંતર થાય ?

૧૪. * સમઢિબાણુ ત્રિકોણના પાયામાંના ગમે તે બિંદુમાંથી સરખી બાણુઓ પર દોરેલા લંબોનો સરવાળો, પાયાના એક છેડા-માંથી સામી બાણુ પર દોરેલા લંબની બરાબર હોય છે.

૧૫. સમબાણુ ત્રિકોણની અંદરના ગમે તે બિંદુમાંથી ત્રણ બાણુઓ પર દોરેલા લંબોનો સરવાળો, તે ત્રિકોણના કોઈ પણ શિરોબિંદુમાંથી સામી બાણુ પર દોરેલા લંબની બરાબર હોય છે.

પ્રમેય ૨૩.

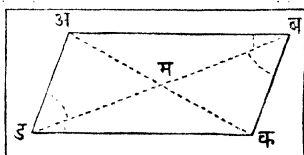
કોઈ પણ ચતુષ્કોણમાં જે—

(૧) સામસામી બાણુઓ પૈકી, એક જોડમાંની બે લીટીઓ સરખી અને સમાંતર હોય, અથવા

(૨) સામસામી બાબુઓની દરેક બેઠાંની બાબુઓ સરખી હોય, અથવા

(૩) સામસામા ખુણા સરખા હોય, અથવા

(૪) કોઈ એક બીજને દુભાગતા હોય,
તો ચતુષ્કોણ સમાંતરબાબુ હોય છે.



(૧)

પક્ષ—અવકડ ચતુષ્કોણમાં અવ, કડ સરખી અને સમાંતર છે.

સાધ્ય—અવકડ સમાંતરબાબુ ચતુષ્કોણ છે.

રચના—અ,ક સાધી.

સિદ્ધતા—

હવે \therefore અવ \parallel કડ,

(પક્ષ)

અને તેમને અક મળે છે,

$\therefore \angle$ ચઅક $=$ વ્યુત્ક્રમ \angle અકડ.

(પ્ર. ૬)

હવે $\therefore \triangle$ અવક, અને \triangle કડઅમાં,

અવ $=$ કડ;

(પક્ષ)

અક સાધારણ છે;

\angle ચઅક $=$ \angle અકડ;

\therefore આ ત્રિકોણો એકરૂપ છે.

(પ્ર. ૧૦)

$\therefore \angle$ અકવ $=$ \angle કઅડ.

અને \therefore આ વ્યુત્ક્રમ ખુણા છે,

\therefore ચક \parallel અડ.

(પ્ર. ૪)

\therefore અવકડ સમાંતરબાબુ ચતુષ્કોણ છે.

(૨)

પક્ષ—અવ=કહ, અને વક=અહ.

સાધ્ય—અવકહ સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણ છે.

સિદ્ધતા—

 $\therefore \triangle$ અવક, \triangle કહઅમાં—

અવ=કહ

(પક્ષ)

વક=હઅ,

”

અક સાધારણ છે;

 $\therefore \triangle$ અવક $\equiv \triangle$ કહઅ. (પ્ર. ૧૪) $\therefore \angle$ વઅક = \angle હકઅ, અને \angle વકઅ = \angle કઅહ. \therefore અવ \parallel હક, અને વક \parallel અહ. (પ્ર. ૪) \therefore અવકહ સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણ છે.

(૩)

પક્ષ— \angle અ = \angle ક, અને \angle વ = \angle હ.

સાધ્ય—અવકહ સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણ છે.

સિદ્ધતા—

 $\therefore \angle$ અ = \angle ક, અને \angle વ = \angle હ, (પક્ષ) $\therefore \angle$ અ + \angle વ = \angle ક + \angle હ;એટલે \angle અ + \angle વ એ સરવાળો \angle અ + \angle વ + \angle ક + \angle હનું અર્ધ છે.અને \therefore અવકહ એક ચતુષ્કોણ છે. $\therefore \angle$ અ + \angle વ + \angle ક + \angle હ = ૪ કાટખુણા,

(પ્ર. ૮, ઉ. ૬)

 $\therefore \angle$ અ + \angle વ = ૨ કાટખુણા, \therefore અહ \parallel વક.

(પ્ર. ૫)

એજ પ્રમાણે અવ \parallel હક છે એમ બતાવી શકાશે. \therefore અવકહ સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણ છે.

(૪)

પક્ષ—અક, અડ એક બીજાને મમાં દુભાગે છે.

સાધ્ય—અવકાઢ સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણ છે.

સિદ્ધતા—

∴ \triangle અમડ અને \triangle કમચમાં—

અમ = કમ, (પક્ષ)

અડ = ચમ, ”

 \angle અમડ = \angle કમચ, (પ્ર. ૩)

∴ આ ત્રિકોણો એકરૂપ છે. (પ્ર. ૧૦)

∴ અડ=ચક; અને

∴ \angle અડમ=ચુત્કમ \angle કચમ,

∴ અડ ॥ ચક. (પ્ર. ૪)

∴ અવકાઢ સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણ છે.

(પ્ર. ૨૩, પ્રકાર ૧)

૨૩મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. * સરખી ઉંચાઈના ત્રિકોણો અથવા સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણો, સમાંતર લીટીઓની એકજ જોડ વચ્ચે મૂકી શકાય છે.

૨. અવકાઢ ચતુષ્કોણમાં \angle અ, \angle ચ, \angle અડ અનુક્રમે ૬૦°, ૧૨૦°, ૧૨૦° ના છે; તો \angle ક કેવડો? અવકાઢ કઈ જાતનો ચતુષ્કોણ છે?

૩. સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણની સામસામી બાણુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી સીધી લીટી બાણુ બે બાણુઓને સમાંતર હોય છે.

૪. * કાટખુણુ ચતુષ્કોણના કણો સરખા હોય છે.

૫. * ચોરસના અને તેમજ સમબાણુ ચતુષ્કોણના કણો એક બીજા પર લંબ હોય છે.

૬. * સમબાણુ ચતુષ્કોણના કણો તેના ખુણાઓને દુભાગે છે.

૭. * ચતુષ્કોણના કણો સમાન હોઈને જો તે એક બીજાને કાટખુણુ દુભાગે, તો તે ચતુષ્કોણ ચોરસ હોય છે.

૮. * જે ચતુષ્કોણના કોણો ત્રાના મોટા હોઈને એક બીજાને કાટખુણે દુભાગે, તો તે ચતુષ્કોણ સમબાણુ હોય છે.

૯. (૧) કાટખુણુ ચતુષ્કોણના કોણો એક બીજાને દુભાગે છે. (૨) સમબાણુ ચતુષ્કોણના કોણો એક બીજા પર લંબ હોય છે, એક બીજાને દુભાગે છે, અને તે સમબાણુ ચતુષ્કોણના ખુણાઓને પણ દુભાગે છે. (૩) ચોરસના કોણો સરખા હોય છે, તે એક બીજા પર લંબ હોય છે, એક બીજાને દુભાગે છે, અને તે ચોરસના ખુણાને પણ દુભાગે છે.

૧૦. અબકઢ સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણ છે, અને અબ,કઢ બાણુઓ સ્થ અને ચ બિંદુમાં દુભાગેલી છે; તો બતાવો કે બક્ષડચ સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણ છે.

૧૧. * જે ચતુષ્કોણની સર્વ બાણુઓ સરખી અને એક ખુણો કાટખુણો હોય છે, તે ચોરસ હોય છે.

૧૨. અબકઢ ચતુષ્કોણમાં $\angle અ = \angle બ$ અને $\angle ક = \angle ઢ$ છે; તો આ ચતુષ્કોણની સામસામી બાણુઓની એક જોડમાંની બાણુઓ સરખી છે, અને બીજી જોડમાંની બાણુઓ સમાંતર છે એમ બતાવી આપો.

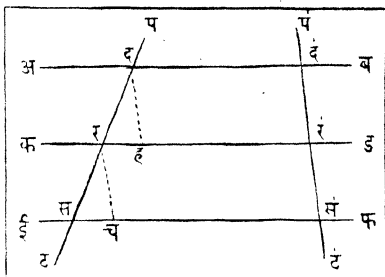
૧૩. અબકઢ એક ચતુષ્કોણ છે; બકઢપ, કઢઅદ, ઢઅબર, અને અબકસ, એ ચાર સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણો છે; તો અપ, બદ, કર, ઢસ સરખી અને સમાંતર છે એમ બતાવી આપો.

૧૪. જે ચતુષ્કોણના દરેક શિરોબિંદુથી બીજાં શિરોબિંદુઓ સુધીનાં અંતરોનો સરવાળો સરખો હોય, તો તે ચતુષ્કોણ કાટખુણુ ચતુષ્કોણ હોય છે.

૧૫. અબકઢ સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણ છે, અને તેમાં ગમે ત્યાં એક મ બિંદુ છે. મઅઈબ, મબકક, મકગઢ, મઢહઅ, આ સમાંતર-બાણુ ચતુષ્કોણ દોર્યા હોય, તો ઈફગઢ સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણ છે, અને તે અબકઢથી બમણો છે એ સિદ્ધ કરો.

પ્રમેય ૨૪.

જો ત્રણ અથવા ત્રણથી વધારે સમાંતર સીધી લીટીઓને છેદનારી એક લીટીના તે સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેના ગાળાઓ સરખા હોય, તો તે સમાંતર લીટીઓને છેદનારી બીજી કોઈ પણ લીટીના તેવા ગાળાઓ પણ સરખા હોય છે.



પક્ષ—અબ, કડ, ફફ સમાંતર સીધી લીટીઓ છે; તેમને પટ સીધી લીટી અનુક્રમે દ,ર,સમાં છેદે છે; અને દર=રસ. બીજી કોઈ પણ પટ સીધી લીટી આ સમાંતર સીધી લીટીઓને દ,ર,સમાં છેદે છે.

સાધ્ય—દર=રસ.

રચના—પરને સમાંતર દહ, રચ દોરો, અને ધારો કે તે કડ, ફફને હ અને ચમાં મળે છે.

સિદ્ધતા—

હવે ∴ કડ ॥ ફફ,

(પક્ષ)

∴ ∠દરહ=સંગત ∠રસચ.

(પ્ર. ૬)

∴ દહ, રચ બંને ॥ પટ,

∴ દહ ॥ રચ.

(પ્ર. ૭)

∴ દરસ તેમને છેદે છે,

∴ રદહ=અંગત ∠સરચ.

(પ્ર. ૬)

∴ \triangle દરહ અને \triangle રસચમાં—

\angle દરહ= \angle રસચ;

\angle રદહ= \angle સરચ;

દર = રસ;

(પક્ષ)

∴ આ ત્રિકોણો એકરૂપ છે.

∴ રદહ = રચ.

રદહ ॥ ર્દર, અને ર્દર ॥ ર્દર,

∴ ર્દરર્દર સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણ છે.

તેમજ રચર્સર પણ સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણ છે.

∴ રદહ=ર્દર અને રચ=ર્સ.

(પ્ર. ૨૨)

પણ રદહ=રચ,

∴ ર્દર=ર્સ.

ઉપસિદ્ધાંત ૧—જો ત્રિકોણની કોઈ બાણુના મધ્યબિંદુ-માંથી પાયાને સમાંતર લીટી દોરી હોય, તો તે બીજી બાણુને દુભાંગે છે.

ઉપસિદ્ધાંત ૨—ત્રિકોણની બે બાણુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટી ત્રીજી બાણુને (૧) સમાંતર હોય છે અને (૨) તેનાથી અર્ધાં હોય છે.

૨૪મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. ત્રિકોણની બાણુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટીઓથી તે ત્રિકોણના જે ચાર ત્રિકોણ થાય છે, તે એકરૂપ હોય છે.

૨. અથવા ત્રિકોણની અથ અને અક બાણુઓમાં અનુક્રમે ર્દ અને ર્દ બિંદુઓ એવાં લીધાં છે, કે અર્દ=૧/૨ અથ, અને અર્દ=૧/૨ અક; તો ર્દર્દ, અથના એક ચતુર્થાંશ છે અને તેને સમાંતર છે એ બતાવી આપો.

૩. * ચતુષ્કોણની પાસપાસેની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓ સાંધવાથી બનેલી આકૃતિ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ હોય છે, એ બતાવી આપો.

૪. * ચતુષ્કોણની સામસામી બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટીઓ એક બીજીને દુભાગે છે.

૫. ચતુષ્કોણની સામસામી બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટીઓ, અને તેના કર્ણોનાં મધ્યબિંદુઓને સાંધનારી લીટી, એક બિંદુમાં મળે છે અને તેમાંજ દુભગાય છે.

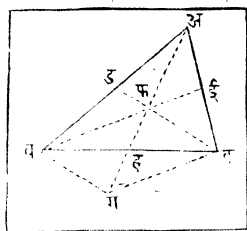
૬. * કાટખુણુ ત્રિકોણના કાટખુણુના શિરોબિંદુમાંથી દોરેલી મધ્યગા કર્ણના અર્ધ જેટલી હોય છે.

૭. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની એક બાજુના મધ્યબિંદુને તેની સામી બાજુનાં શિરોબિંદુઓની સાથે સાંધનારી બે લીટીઓની વચ્ચેના ખુણા જે કાટખુણો હોય, તો તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણની એક બાજુ બીજીથી બમણી હોય છે.

૮. ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓનાં સ્થાન આપેલાં છે, તો તે ત્રિકોણ દોરો.

પ્રમેય ૨૫.

ત્રિકોણની મધ્યગાઓ એકજ બિંદુમાં મળે છે, અને આ બિંદુથી મધ્યગાઓના જે બે ભાગ થાય છે, તેમાંથી શિરો-બિંદુ તરફનો ભાગ બીજા ભાગથી બમણો હોય છે.



પક્ષ—અવક એક ત્રિકોણ છે, અને તેની બંઈ અને કહ મધ્યગા એક બાજુને ફ મિંદુમાં છેદે છે.

સાધ્ય—(૧) અહ મધ્યગા ફ મિંદુમાં થઈને જાય છે;

(૨) અફ=૨ ફહ; વફ=૨ ફઈ; કફ=૨ ફહ.

સિદ્ધતા—

(૧) (અ,ફ મિંદુઓમાં થઈને જનારી સીધી લીટી મધ્યગા છે એમ સિદ્ધ થાય, તો ત્રણે મધ્યગાઓ એકજ મિંદુમાં થઈને જાય છે એ સિદ્ધ થાય.)

રચના—અ,ફ સાંધો. અફ લીટીને વધારીને તેનો વધારેલો ફગ ભાગ અફની બરાબર કરો. વગ અને કગ સાંધો.

∴ \triangle અવગની અવ અને અગ બાજુઓનાં મધ્યમિંદુઓ અનુક્રમે હ અને ફ છે; (પક્ષ અને રચના)

∴ હફ, વગને સમાંતર છે અને વગના અર્ધ બરાબર છે. (પ્ર. ૨૪, ડિ. સિ. ૨)

એજ પ્રમાણે અકગ ત્રિકોણની અગ અને અક બાજુઓનાં અનુક્રમે ફ અને હ મધ્યમિંદુઓ છે; (રચના અને પક્ષ)

∴ ફઈ, ગકને સમાંતર છે અને ગકના અર્ધ બરાબર છે. (પ્ર. ૨૪, ડિ. સિ. ૨)

હવે ∴ હક ॥ વગ,

અને બંઈ ॥ ગક,

∴ વગકફ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

અને ∴ સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના કર્ણ એક બાજુને દુભાગે છે;

∴ વક અને ફગનું હ મધ્યમિંદુ છે.

હવે ∴ હ, વકનું મધ્યમિંદુ છે,

∴ અફહ મધ્યગા છે, અને તે ફમાં થઈને જાય છે

એ સ્પષ્ટ છે.

∴ ત્રિકોણની ત્રણે મધ્યગા એકજ મિંદુમાં મળે છે એ સ્પષ્ટ થાય છે.

(૨)

∴ ફહ = હગ,

∴ ફગ = ૨ ફહ.

પણ ફગ = અફ,

(રચના)

∴ અફ = ૨ ફહ.

એજ પ્રમાણે બફ=૨ ફહ, અને કફ = ૨ ફહ, એ સિદ્ધ કરી શકાય.

૨૫મા પ્રમેય પરના પ્રશ્ન.

૧. સમાંતરબાણુ ચતુષ્કોણની પાસપાસેની બે બાણુઓનાં મધ્ય-બિંદુઓને સાંધનારી લીટી એક કર્ણને સમાંતર હોય છે, અને આ લીટીના છેડાઓને સામા શિરોબિંદુ સાથે સાંધનારી લીટીઓથી તે કર્ણના ત્રણ સરખા ભાગ થાય છે.

૨. એક સીધી લીટીના ત્રણ સરખા ભાગ કરો.

૩. જો ત્રિકોણની બે મધ્યગા સરખી હોય, તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિબાણુ હોય છે; અને જો ત્રણે મધ્યગા સરખી હોય, તો તે ત્રિકોણ સમબાણુ હોય છે.

૪. ત્રિકોણની ત્રણે મધ્યગાને સરવાળો પરિમિતિના ત્રણ ચતુર્થાશ કરતાં વધારે હોય છે.



નવી ભૂમિતિ ભાગ ૧.

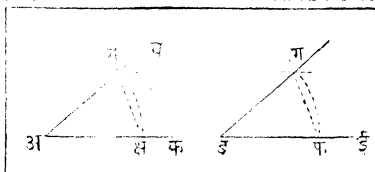


ખંડ ૩.

(કૃત્યો.)

કૃત્ય ૧.

આપેલી લીટીમાંના આપેલા બિંદુ આગળ આપેલા ખુણા જેવડો ખુણો કરવો.



પક્ષ—ડઈ આપેલી લીટી છે. ડ આપેલું બિંદુ છે. બઅક આપેલો ખુણો છે.

સાધ્ય—આપેલા \angle બઅક જેવડો \angle ડઈડગ કરવો.

રચના—અ મધ્યબિંદુ ધારીને ગમે તે ત્રિજ્યાએ એક કોંસ દોરો. તેને, અવ અને અકને અનુક્રમે ય અને કમાં છેદવા દો. ડ મધ્યબિંદુ ધારીને પહેલાં જેટલીજ ત્રિજ્યાએ કોંસ દોરો. તે ડઈને અથવા ડઈના વધારેલા ભાગને ફમાં છેદે છે, એમ ધારો. ફ મધ્યબિંદુ લઈને ક્ષય (સીધી લીટીની) લંબાઈ જેટલી ત્રિજ્યાએ એક કોંસ દોરો. તેને ફ કોંસને ગમાં છેદવા દો. ડગ સાધો.

ફડગ માગેલો ખુણો થશે.

સિદ્ધતા—

(ફગ અને ક્ષય સાધો.)

\therefore અક્ષય, ડફગ ત્રિકોણોમાં—

અક્ષ=ડફ;

(સરખાં વર્તુળની ત્રિજ્યા)

અય=ડગ;

”

ક્ષય=ફગ;

”

\therefore આ ત્રિકોણો એકરૂપ છે.

(પ્ર. ૧૪)

$\therefore \angle$ ફડગ એટલે \angle ડઈડગ = \angle ક્ષઅય.

૧લા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

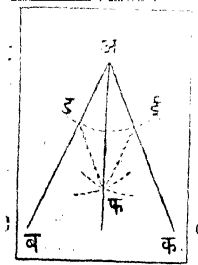
૧. આપેલા ત્રિકોણ જેવડો ત્રિકોણ દોરો.

૨. આપેલા ચતુષ્કોણ, પંચકોણ...જેવડી આકૃતિ દોરો.

૩. આપેલા કાટખુણુ ત્રિકોણના બે સમઘિબાજુ ત્રિકોણ કરો.

કૃત્ય ૨.

આપેલા ખુણાને દુભાગો.



પક્ષ—બઅક આપેલો ખુણો છે.

સાધ્ય—બઅક ખુણો દુભાગવો.

રચના—અ મધ્યબિંદુ લઈને ગમે તે ત્રિજ્યાએ, અથવા અન્ય અકને અનુક્રમે ડ અને ઈમાં છેદે એવો કૌંસ દોરો. ડ અને ઈ મધ્યબિંદુઓ લઈને ડઈ જેટલી ત્રિજ્યાએ ફમાં એક બીજાને છેદનારા બે કૌંસો દોરો. અફ સાધો.

અફ આપેલા ખુણાને દુભાગે છે.

સિદ્ધતા—

(ડફ, ઈફ સાધો.)

∴ અફઈ અને અફડ ત્રિકોણોમાં—

અઈ = અડ;

(એકજ વર્તુળની ત્રિજ્યા)

ફઈ = ફડ;

(સરખાં વર્તુળની ત્રિજ્યા)

અફ બંનેમાં સાધારણ;

∴ $\triangle અઈફ \equiv \triangle અડફ$.

(પ્ર. ૧૪)

∴ $\angle ડઅફ = \angle ઈઅફ$.

૨જા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. આપેલા ખુણાના ૪, ૮...સરખા ભાગ કરો.

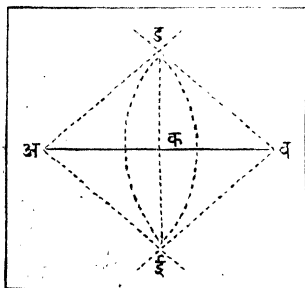
૨. આપેલા ખુણાના બે ભાગ એવા કરો, કે એક બીજાથી ત્રણગણો થાય.

૩. અથવા ખુણાના અડધા ભાગ બુનેમાં હ અને ઈ બિંદુઓ એવાં

સો, કે $\angle અડઈ = ૨ \angle અઈહ$ થાય.

કૃત્ય ૩.

આપેલી લીટીને દુભાગવી.



પદ્ધતિ — અથવા આપેલી લીટી છે.

સાધ્ય — અથવા બે સરખા ભાગ કરવા.

રચના — અથવા મધ્યબિંદુઓ લઈને કે અથવા મોટી ત્રિજ્યાએ, હ અને ઈમાં એક બીજાને છેદનારા બે ઢાંસો દોરો. હ, ઈ સાંધો, અને સાંધનારી લીટીને અથવા કમાં છેદવા દો.

અથવા, ક બિંદુમાં દુભાગાશે.

સિદ્ધાન્ત —

(અહ, અઈ, અઈ, અઈ સાંધો.)

\therefore અહઈ, અઈઈ ત્રિકોણોમાં —

અહ = અઈ;

(સરખાં વર્તુળની ત્રિજ્યા)

અઈ = અઈ;

”

હઈ બંનેમાં સાધારણ;

$\therefore \triangle અહઈ = \triangle અઈઈ$.

(પ. ૧૪)

$\therefore \angle અહક = \angle અઈક$.

હવે \triangle અડક, \triangle ચડકમાં—

અડ=ચડ;

ડક બંનેમાં સાધારણ;

\angle અડક = \angle ચડક;

$\therefore \triangle$ અડક $\equiv \triangle$ ચડક.

(પ. ૧૦)

\therefore અક=કચ.

૩મી કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. ટિપલા કૃત્યની આકૃતિમાં અક, હરિને કાટખુણે દુભાગે છે એમ બતાવી આપો.

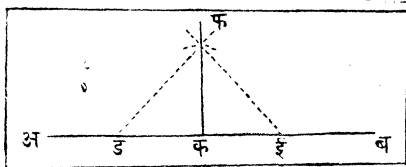
૨. આપેલી સીધી લીટીના ટ, ટ.....સરખા ભાગ કરો.

૩. આપેલી સીધી લીટીના એવા બે ભાગ કરો, કે (૧) એક બીજીથી ત્રણગણો થાય; (૨) એક બીજીથી સાતગણો થાય.

૪. આપેલા ત્રિકોણના પાયામાં એવું એક બિંદુ ચોવી કાઢો, કે તેનું સામા શિરોબિંદુથી અંતર બાકીની બે બાજુના સરવાળાના અર્ધ બરાબર હોય.

કૃત્ય ૪.

આપેલી લીટી પર તેમાં આપેલા બિંદુમાંથી લંબ દોરો.



પક્ષ—અબ આપેલી લીટી છે. ક આપેલું બિંદુ છે.

સાધ્ય—કમાંથી અબ પર લંબ દોરવો.

પહેલી રીત.

રચના—આપેલી લીટીમાં કથી સરખે અંતરે અને તેની સામસામી બાજુએ ટ અને ઈ બિંદુ લો. ટ, ઈ મધ્યબિંદુઓ ધારીને કડથી

ગમે તેટલી મોટી ત્રિજ્યાએ કમાં છેદનારા કૌંસો દોરો. કફ સાંધો.
કફ, અથવા પર લંબ થશે.

સિદ્ધતા—

(કઢ, ફઈ સાંધો.)

$\therefore \triangle કઢ અને \triangle ફઈ$ માં—

કઢ = ફઈ;

(રચના)

કફ = ફઈ;

(સરખાં વર્તુળની ત્રિજ્યા)

કફ અનેમાં સાધારણ;

$\therefore \triangle કઢ \equiv \triangle ફઈ$.

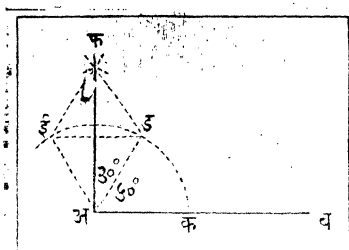
(પ્ર. ૧૪)

$\therefore \angle કઢ = \angle ફઈ$.

\therefore કફ, અથવા પર લંબ છે.

બીજી રીત.

જે બિંદુમાંથી લંબ દોરવો છે તે બિંદુ અ છે એમ ધારો.



રચના—અને મધ્યબિંદુ ધારી ગમે તે ત્રિજ્યાએ કઢઈ કૌંસ દોરો, અને તેને અથવા કમાં છેદવા દો. તેજ ત્રિજ્યાએ તે કૌંસના કઢ, ઢઈ ભાગ કાપી કાઢો. ઢ અને ફ મધ્યબિંદુઓ લઈને પહેલાંના જેટલીજ ત્રિજ્યાએ એક બીજાને કમાં છેદનારા બે કૌંસ દોરો. અફ સાંધો.

સિદ્ધતા—

(અઢ, અઈ, કઢ, પઈ સાંધો.)

$\therefore અઢ = ઢઈ = ફઅ$.

∴ અઢઈ સમખાળુ ત્રિકોણ છે.

∴ \angle ડઅઈ = 60° . (પ્ર. ૧૨, ઉ. સિ. ૨)

તેમજ ∴ અફ, \angle ડઅઈને દુભાગે છે; (ક્ર. ૩)

∴ \angle ડઅફ = 30° .

પણ \triangle અકઢ સમખાળુ છે;

∴ \angle કઅઢ = 60° .

∴ \angle ઘઅફ = 60° .

૪થા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. આપેલા ચોરસ જેવડો ચોરસ દોરો.

૨. ૪૫ અંશનો ખુણો કોણમાપકની મદદ વગર કાઢો.

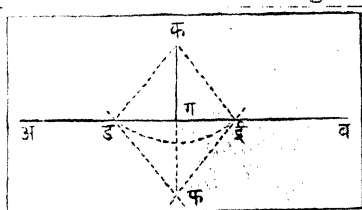
૩. ૨૨ $\frac{1}{2}$ અંશનો ખુણો કોણમાપકની મદદ લીધા વગર કાઢો.

૪. જેનો કર્ણ આપેલી સીધી લીટી બરાબર થાય, એવો

ચોરસ દોરો.

કૃત્ય ૫.

આપેલી અભર્યાદ સીધી લીટી પર તેની બહાર આપેલા બિંદુમાંથી લંબ દોરવો.



પક્ષ—અઘ આપેલી લીટી છે. ક આપેલું બિંદુ છે.

સાધ્ય—કમાંથી અઘ પર લંબ દોરવો.

રચના—ક મધ્યબિંદુ અને જોઈતી ત્રિજ્યા લઈને અઘને ડ અને ફમાં છેદનારો ફાંસ દોરો. ડઈ મધ્યબિંદુઓ લઈને ડઈ

નેટલી ત્રિજ્યાએ, એક બીજાને કામાં છેદે એવા બે ક્રાંસ દોરો.
કા સાંધો. ધારો કે કા, અબને ગમાં છેદે છે.

કા, અબ પર લંબ થશે.

સિદ્ધતા—

(કા, કાઈ, કા, કાઈ સાંધો.)

∴ \triangle કાકા અને \triangle કાઈકામાં—

કા = કાઈ;

કા = કાઈ;

કા અનેમાં સાધારણ;

∴ \triangle કાકા = \triangle કાઈકા.

(પ. ૧૪)

∴ \angle કાકા = \angle કાઈકા.

હવે \triangle કાકા અને \triangle કાઈકામાં—

∴ કા = કાઈ;

કા અનેમાં સાધારણ;

\angle કાકા = \angle કાઈકા;

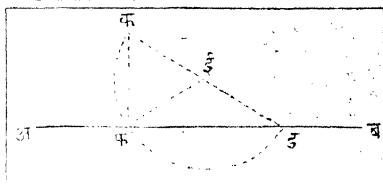
∴ \triangle કાકા = \triangle કાઈકા;

(પ. ૧૦)

∴ \angle કાકા = \angle કાઈકા.

∴ કા, અબ પર લંબ છે.

બીજી રીત.



રચના—અબમાં (કની બરાબર નીચે ન હોય એવું) ગમે
તે ક બિંદુ લો. કા, કા સાંધો.

કાને કામાં દુબારો.

કા મધ્યબિંદુ અને કા ત્રિજ્યા લઈને અબને કામાં છેદનારો
ક્રાંસ દોરો. કા સાંધો.

કફ, અથવા પર લંબ થશે.

સિદ્ધતા—

(ઈ, ફ સાંધા.)

$$\therefore \triangle \text{કઈફમાં } \text{કઈ} = \text{ફઈ},$$

$$\therefore \angle \text{કફઈ} = \angle \text{ફકઈ}. \quad (\text{પ્ર. ૧૨})$$

$$\text{તેજ પ્રમાણે } \therefore \triangle \text{ઈફડમાં } \text{ઈફ} = \text{ઈડ},$$

$$\therefore \angle \text{ઈફડ} = \angle \text{ફડઈ}. \quad (\text{પ્ર. ૧૨})$$

$$\therefore \angle \text{કફઈ} + \angle \text{ઈફડ} = \angle \text{ફકઈ} + \angle \text{ફડઈ}.$$

$$\text{પણ } \angle \text{કફઈ} + \angle \text{ઈફડ} = \angle \text{કફડ};$$

$$\therefore \angle \text{કફડ} = \angle \text{ફકઈ} + \angle \text{ફડઈ}.$$

$$\therefore \angle \text{કફડ} = ૧ (\angle \text{કફડ} + \angle \text{ફકઈ} + \angle \text{ફડઈ}).$$

$$\text{પણ } \therefore \angle \text{કફડ} + \angle \text{ફકઈ} + \angle \text{ફડઈ} = ૨ \text{ કાટખુણાં};$$

$$(\text{પ્ર. ૮})$$

$$\therefore \angle \text{કફડ} = ૧ \text{ કાટખુણો.}$$

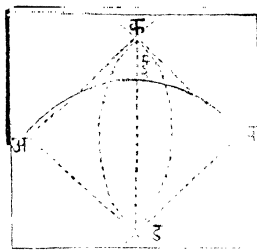
$$\therefore \text{કફ, અથવા પર લંબ છે.}$$

પમા કૃત્ય પરનો પ્રશ્ન.

અથવા, ગમે તેવો ત્રિકોણ દોરો. દરેક શિરોબિંદુમાંથી સામી બાજુ પર લંબ દોરો. આ લંબો એકજ બિંદુમાં મળે છે એ નોંધ લો.

કૃત્ય ૬.

આપેલો કોંસ દુભાગવો.



પક્ષ—અથવા આપેલો કોંસ છે.

સાધ્ય—અથવા દુભાગવો.

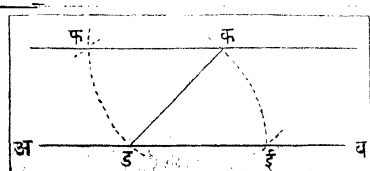
રચના—અ મધ્યખિંદુ અને અવના અર્ધથી જરા મોટી ત્રિજ્યા લઈને કૉંસ દોરો. તેટલીજ ત્રિજ્યા અને જ મધ્યખિંદુ લઈને પહેલા કૉંસને ક અને હમાં છેદે એવો ખીજો કૉંસ દોરો. કહ સાંધો.

કહ, અવ કૉંસને ફમાં દુભાગે છે.

સિદ્ધતા—(આ કૃત્યની સિદ્ધતા નવી ભૂમિતિના ખીજા ભાગ-માંના પ્રમેયના આધાર સિવાય સહેલી રીતે આપવી શક્ય નથી, ખાટે તે વિદ્યાર્થીઓને શીખવવાની ખાસ જરૂર નથી.)

કૃત્ય ૭.

આપેલા ખિંદુમાંથી આપેલી લીટીને સમાંતર લીટી દોરવી.



પક્ષ—અવ આપેલી લીટી છે. ક આપેલું ખિંદુ છે.

સાધ્ય—કમાંથી અવને સમાંતર લીટી દોરવી.

રચના—અવમાં એક ગમે તે હ ખિંદુ લો. હક સાંધો. કહવથી વિરુદ્ધ બાળુએ હક સાથે કહવ જેવડો ખુણો કરનારી કફ લીટી દોરો.

સિદ્ધતા—

\therefore કફ અને અવ લીટીઓને કહ લીટી મળે છે,

અને \angle ફકહ = \angle કહવ; (રચના)

\therefore કફ \parallel અવ. (પ્ર. ૪)

ઉપલી રચનામાં \angle કહક જેવડો \angle હકમ, હકની તેજ બાળુએ (એટલે હકની જે બાળુએ \angle કહક છે તેજ બાળુએ, એટલે જમણી બાળુએ) કર્યો હોય તો ચાલે કે? કેમ નહિ? તેજ બાળુ પર ખુણો કરીને સમાંતર લીટી દોરવી હોય, તો ખુણો કેવડો

કરવો? તેજ બાજુ પર \angle **બક** જેવડો ખુણો કરીને સમાંતર લીટી કાઢવી હોય, તો **ક** ખિંદુ ક્યાં લેવું?

૭મા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. પાસપાસેની બે બાજુઓ અને તેમની વચ્ચેનો ખુણો એ આખ્યાં હોય, તો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ પુરો કરો.

૨. જેની દરેક નાની બાજુ મોટી બાજુથી અર્ધાં હોય, એવો એક લંબચોરસ આપેલી લીટી પર દોરો.

૩. જેનો એક ખુણો 60° હોય, એવો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ આપેલી લીટી પર કાઢો.

૪. જેનો એક ખુણો અને પરિમિતિ આખ્યાં હોય, એવો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો.

૫. જેની બે બાજુઓ અને કર્ણ અનુક્રમે ૫, ૨, ૪ સે. મી. હોય, એવો સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ કરો.

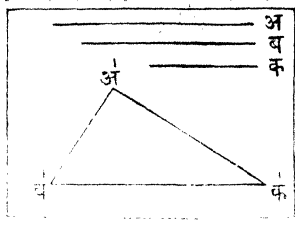
૬. જેની એક બાજુ ૨.૫" અને કર્ણ ૪" હોય એવો લંબચોરસ કાઢો.

૭. આપેલી લીટીથી આપેલે અંતરે હોય એવી એક સમાંતર લીટી દોરો.

૮. બે પાસપાસેની બાજુઓ અને ગમે તે સામસામી બાજુઓની વચ્ચેનું અંતર એ આખ્યાં છે; તે પરથી તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો.

કૃત્ય ૮.

આપેલી ત્રણ લીટી અવી છે. કે તે પૈકી કોઈ પણ બે મળીને ત્રીજીથી વધારે છે; તો જે ત્રિકોણની બાજુઓ આ લીટીઓની બરાબર થાય એવો ત્રિકોણ દોરવો.



પક્ષ—અ, વ, ક, એવી ત્રણ આપેલી સીધી લીટીઓ છે, કે જે પંક્તિ કોઈ પણ બેનો સરવાળો ત્રીજીથી વધારે છે.

સાધ્ય—અ, વ, ક, જેટલી જેની આગળુઓ હોય, એવો ત્રિકોણ દોરવો.

રચના—અ જેટલી **વ** લીટી દોરો. **વ** અને **ક** મધ્યબિંદુઓ ધારીને અનુક્રમે **ક** અને **વ** જેટલી ત્રિજ્યાએ બે ક્રૅસો દોરો. તેમને એક બીજાને અંમાં છેદવા દો, **અ** **વ**, **અ** **ક** સાંધો.

અવક માંગેલો ત્રિકોણ છે.

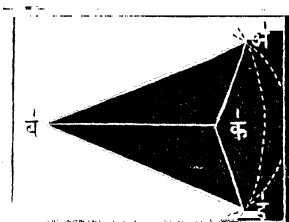
સિદ્ધતા— $\frac{વ}{અ} = અ$,

$\frac{ક}{અ} = વ$,

$\frac{વ}{અ} = ક$,

∴ **અવક** ત્રિકોણની આગળુઓ આપેલી લીટીઓની બરાબર છે.

ધારો કે આપણે એકજ પાયા પર બની શકે તેટલા એવા ત્રિકોણો દોરવા છે, કે જેમની આગળુઓ આપેલી લીટીઓની બરાબર હોય; તો આપણે તે કેમ દોરીશું ?



ધારો કે અ, વ, ક, આપેલી લીટીઓ છે, અને તે પંક્તિ અ પામે છે.

અ જેટલી **વ** લીટી દોરો. ધારો કે **ક** માંથી **વ** જેટલી લાંબી લીટીઓ નીકળે તેટલી દોરવી છે, તો તે કેટલી દોરી શકાશે ? એવી લીટીઓના બીજા છેડા બતાવનારી લીટી (**ક** થી **વ** અંતરે) હોય.

એવાં સર્વ બિંદુઓનો માર્ગ) આપણે શી રીતે દોરી શકીએ ? “કં મધ્યબિંદુ અને જ નેટલી ત્રિજ્યા લઈને વર્તુળ દોરો.” આ વર્તુળની સર્વ ત્રિજ્યાઓ જ નેટલી લાંબી છે. આ ત્રિજ્યાઓ સિવાય કંમાંથી દોરેલી બાકીની સર્વ લીટીઓ જથી ઓછી કે વધારે થશે. હવે, જમાંથી ક નેટલી લાંબી લીટીઓ નીકળે તેટલી દોરવી હોય, તો તે લીટીઓ કઈ થશે ? “જ મધ્યબિંદુ અને ક ત્રિજ્યા લઈને દોરેલા વર્તુળની ત્રિજ્યાઓ.” આ વર્તુળો એક બીજાને ક્યાં છેદે છે ? “જ અને હ બિંદુઓમાં.” આ બિંદુઓમાંથી જ અને ક સુધી દોરેલી લીટીઓની લંબાઈ કેટલી છે ? “આ બિંદુઓ સિવાય તમે બીજું એવું કોઈ બિંદુ કાઢી શકશો, કે જેમાંથી જ, ક સુધી દોરેલી લીટીઓ અનુક્રમે ક અને જ લંબાઈની થાય ? “ના.”

અ, જ, ક નેટલી જેની બાજુઓ અનુક્રમે છે, એવો ફક્ત એક જ ત્રિકોણ બ્યારે જની ઉપલી બાજુએ થઈ શકે છે; ત્યારે તેવડીજ બાજુઓનો જકેડ ત્રિકોણ જક પાયા પર, હ છેડા ઉપલી બાજુએ રાખીનેજ મૂક્યો હોય, તો હ બિંદુ ક્યાં પડશે ? “અ પર.” શા માટે ? “તે બીજી બાજુએ પડે તો ઉપલા નિયમને બાધ આવે.”

આ ઉપરથી સિદ્ધ થાય છે, કે જેની બાજુઓ અનુક્રમે અ, જ, કની બરાબર હોય એવો કોઈ પણ ત્રિકોણ જક પર મૂક્યો હોય, તો તેનું ત્રીજું શિરોબિંદુ અ પર પડવું જોઈએ; માટે જેમની બાજુઓ અનુક્રમે સરખી છે, એવા ત્રિકોણોના મંબમાં શો નિયમ નીકળે છે ? “તે એકરૂપ હોય છે.”

૮મા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. આપેલા ત્રિકોણ બરાબર એક ત્રિકોણ દોરો.
૨. જેની સરખી બાજુઓમાંની એક બાજુ આપેલી હોય, એવો સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ આપેલા પાયા પર દોરો.
૩. આપેલી લીટી પર એવો સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ દોરો કે જેની દરેક સરખી બાજુ પાયાથી બમણી હોય.

૪. જેનો પાયો અને પરિમિતિ આખ્યાં હોય એવો સમઘ્યાળુ ત્રિકોણુ દોરો.

૫. આપેલા પાયા પર એક સમઘ્યાળુ ત્રિકોણુ દોરો.

૬. * કાટખુણાના ત્રણ સરખા ભાગ કરો.

૭. જેની દરેક બાજુ એક કર્ણની બરાબર હોય, એવો સમઘ્યાળુ ચતુષ્કોણુ કાઢો.

૮. આપેલા પાયા પર નિયનિત પટ્ટાણુ કાઢો.

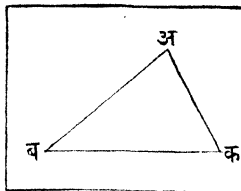
૯. એક ત્રિકોણની (પાયા સિવાયની) બે બાજુઓ અને ઉંચાઈ (સામા શિરોબિંદુમાંથી પાયા પર દોરેલો લંબ) આપેલી છે; તો તે ત્રિકોણુ દોરો.

૧૦. એક ત્રિકોણનો પાયો, એક બાજુ, અને સામા શિરોબિંદુ-માંથી પાયા પર દોરેલી મધ્યગા એટલું આપેલું છે; તે પરથી ત્રિકોણુ કાઢો.

૧૧. એક ત્રિકોણનો પાયો, ઉંચાઈ, અને એક બાજુ આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણુ કાઢો.

૧૨. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના બે કર્ણો અને એક બાજુ આપેલાં છે; તો તે સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણુ દોરો.

સૂચના—



ત્રિકોણના ખુણા અને બાજુઓ દર્શાવવા માટે નીચેનો સંકેત નક્કી થએલો છે. અવક ત્રિકોણમાં—

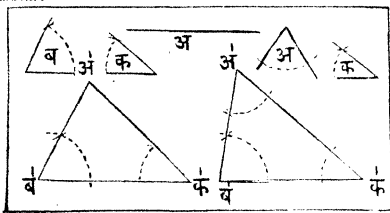
\angle અ એટલે વઅક ખુણો,
 \angle વ એટલે અવક ખુણો,
 \angle ક એટલે વકઅ ખુણો;

તેમજ,

અ બાજુ એટલે \angle અની સામેની (=અક) બાજુ;
 બ બાજુ એટલે \angle બની સામેની (=અક) બાજુ;
 ક બાજુ એટલે \angle કની સામેની (=અબ) બાજુ.

કૃત્ય ૯.

એક બાજુ અને બે ખુણા આપેલા હોય, તે પરથી ત્રિકોણ દારવો.



એક ત્રિકોણને ત્રણ ખુણા હોય છે. તે પૈકી કોઈપણ બે ખુણા એક બાજુને અડકેલા હોય છે, અને ત્રીજો ખુણો તે બાજુની સામે હોય છે.

એક ત્રિકોણમાંની એક બાજુ આપીને બે ખુણા આપવા, એટલે (૧) તે બાજુને અડકીને રહેલા બન્ને ખુણા આપવા; અથવા (૨) તે બાજુની સામેનો એક ખુણો અને તે બાજુને અડકી રહેલો એક ખુણો આપવો. એ સિવાય ત્રીજા પ્રકારનો સંભવ નથી.

૧ લો પ્રકાર—અ આપેલી બાજુ છે. \angle બ અને \angle ક આ અ બાજુને અડકીને રહેલા બે ખુણા છે.

૨ જો પ્રકાર—અ આપેલી બાજુ. \angle અ=અ બાજુની સામેનો ખુણો, અને \angle ક=અ બાજુને અડકીને રહેલો ખુણો.

(૧) રચના—અ લંબાઈની એક રાંધી લીટી દોરો. બ' છેડા આગળ ક'બ'અ એ \angle બ નેવડો ખુણો કરો. ક' છેડા આગળ

બ'ક'અ એ \angle ક નેવડો ખુણો કરો.

અ'બ'ક' આ માગેલો ત્રિકોણ છે.

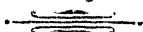
(૨) રચના— \angle અ અને \angle કનો સરવાળો કરીને તે એ કાટખુણામાંથી બાદ કરો. બાદબાકી આવે તે ત્રિકોણનો બાકી રહેલો ત્રીજો ખુણો છે, એટલે કે અને અડકીને રહેલા ખુણા પૈકી બીજો (બ) ખુણો છે. આ ખુણો જાણ્યા પછી પહેલા પ્રકારમાં કહ્યા પ્રમાણે કૃતિ કરીને ત્રિકોણ દોરો.

સિદ્ધતા— \therefore \angle વક = અ;

$$\angle \text{કવઅ} = \angle \text{વ};$$

$$\angle \text{વકઅ} = \angle \text{ક};$$

$\therefore \triangle$ અવકની એક બાજુ અને એ ખુણા, આપેલી બાજુ અને એ ખુણા બરાબર અનુક્રમે છે.



અ બાજુ દોર્યા પછી અની અમુક બાજુએ \angle વ દોરવો જોઈએ, અને અમુક બાજુએ \angle ક દોરવો જોઈએ એમ નથી. આ ખુણા ગમે તેમ દોર્યા હોય તોપણ તૈયાર થનારા ખુણા સરખાજ અને છે. આ વાત ત્રિકોણ એક પર એક મૂક્યા હોય તો ધ્યાનમાં આવશે. આ પરથી એ પણ સ્પષ્ટ થાય છે, કે એ ત્રિકોણના બધા ખુણા અને એકેક બાજુ સરખી હોય તો ત્રિકોણ એકરૂપજ હોય છે.

હમા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. એક કાટખુણ ત્રિકોણનો કર્ણ અને એક સાંકડો ખુણો આપેલા છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૨. એક કાટખુણ ત્રિકોણની કાટખુણો કરનારી એક બાજુ અને તેની સામેનો ખુણો આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૩. એક કાટખુણ ત્રિકોણનો એક સાંકડો ખુણો બીજાથી બમણો છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૪. સમદ્વિબાજુ કાટખુણ ત્રિકોણનો કર્ણ આપેલો છે તો તે ત્રિકોણ કાઢો.

૫. એક ત્રિકોણની ઉંચાઈ અને પાયા પાસેના બંને ખુણા આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૬. એક સમબાજુ ત્રિકોણની ઉંચાઈ આપેલી છે, તો તે ત્રિકોણ કાઢો.

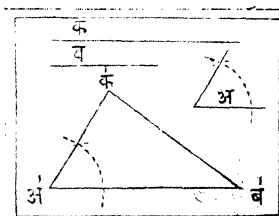
૭ એક સમદ્વિબાજી ત્રિકોણની ઉંચાઈ અને પાયાની સામેના ખુણા એ આપેલાં છે; તે તે ત્રિકોણ કાઢો.

૮. જેનો પાયાની સામેના ખુણા પાયા પાસેના દરેક ખુણાથી ૪ ગણો હોય એવો સમદ્વિબાજી ત્રિકોણ કાઢો.

૯. જેનો પાયો ૨.૪" હોય એવા સમદ્વિબાજી ત્રિકોણ કાઢો.

કૃત્ય ૧૦.

ત્રિકોણની બે બાજી અને તેમની વચ્ચેના ખુણા એ આપેલાં હોય, તે પરથી તે ત્રિકોણ દારવો.



પક્ષ—વ અને ક એ આપેલી બાજીઓ છે. અ આપેલો ખુણો છે.

રચના—આપેલા \angle અ ને વડે બાંધેલ ખુણો કાઢો. બાંધેલ ખુણાની અંત અને અંત એ બાજીઓ આપેલા ક અને વ બાજીની બરાબર કરો.

અંત આ માંગેલો ત્રિકોણ છે.

સિદ્ધતા—(સ્પષ્ટ છે.)

૧૦મા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. એક સમદ્વિબાજી ત્રિકોણનો પાયો અને ઉંચાઈ આપેલાં છે; તે તે ત્રિકોણ દોરો.

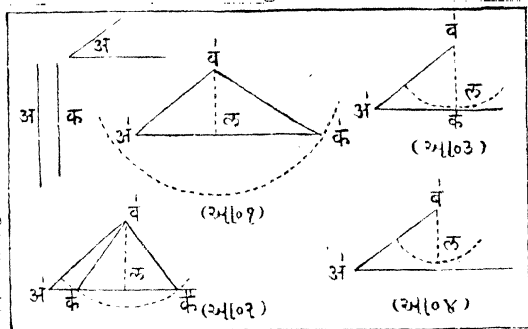
૨. જેનો એક ખુણો 60° હોય અને તેમાં થઈને જતો કર્ણ ૪" લાંબો હોય, એવો સમબાજી ચતુષ્કોણ કાઢો. તેની બાજી કેટલી લાંબી છે?

૩. જેની મધ્યગા ૧.૨" હોય એવો સમબાજી ત્રિકોણ દોરો.

સૂચના—(કેળવણીખાતાએ નક્કી કરેલા ભૂમિતિના અભ્યાસ ક્રમમાં નીચેનું (૧૧મું) કૃત્ય આવતું નથી; માટે તે વિદ્યાર્થીઓને શીખવવાની જરૂર નથી. આપેલા પક્ષ પરથી ત્રિકોણ બનાવવાના જે મુખ્ય પ્રકાર છે, તે બધાનો સમાવેશ થાય એટલા માટેજ કૃત્ય આ કૃત્ય અહીં આપ્યું છે.)

કૃત્ય ૧૧.

ત્રિકોણની બે બાજુઓ અને તે પૈકી એકની સામેના ખુણા એ આપ્યાં હોય, તે પરથી ત્રિકોણ કાઢવો.



પક્ષ—અ અને ક આપેલી બાજુઓ છે, અને \angle અ આપેલો ખુણો છે.

રચના— \angle અ જેવડો બંધક ખુણો કરો. ક જેટલી લાંબી અંક બાજુ રાખો. લ મધ્યબિંદુ ધારીને અ ત્રિજ્યાએ એક વર્તુળ દોરો. (ધારો કે લ = બંધકની અંક પર દોરેલો લંબ છે.)

અ અને લ સાથે સરખાવતાં અ (=બંધક)ની લંબાઈ ઓછી પતી હોય તે પ્રમાણે નીચેના ચાર પ્રકાર થશે.

(૧) ક (=બંધક) કરતાં અ (=બંધક) વધારે લાંબી હોય, તો અ બિંદુ પરિધની અંદર રહે છે, અને બંધક એવો એકજ ત્રિકોણ બને છે. (આકૃતિ ૧ બુઓ.)

(૨) **ચક્ર**, **ચંચ** કરતાં નાની, પણ **લ** કરતાં મોટી હોય, તો **અં** છેડે પરિધની બહાર રહેશે, અને પરિધ **અં** લીટીને **ક** અને **કં** એ બે ઠેકાણે છેદશે.

એવી રીતે **અચક્ર** અને **અચંચ** એવા બે માગ્યા પ્રમાણે ત્રિકોણ બનશે. (આકૃતિ ૨ જુઓ.)

[એવે પ્રસંગે બે જવાબ આવે છે, તેથી આ સંદિગ્ધ પ્રકારનો દાખલો છે.]

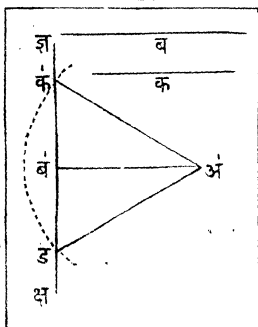
(૩) જો **ચક્ર**, **લ** બરાબર હોય, તો વર્તુળ **અં** લીટીને ફક્ત એકજ ઠેકાણે સ્પર્શ કરશે. એવી સ્થિતિ હોય ત્યારે (ત્રીજી આકૃતિમાં ખતાવ્યા પ્રમાણે) ફક્ત એકજ માગ્યા પ્રમાણે ત્રિકોણ થશે.

(૪) જો **ચક્ર**, **લ**થી નાની હોય, તો વર્તુળ **અં** લીટીને બીલકુલ સ્પર્શ કરશે નહિ. એવી સ્થિતિમાં ત્રિકોણ બીલકુલ બની શકશેજ નહિ. (આકૃતિ ૪ જુઓ.)

સિદ્ધતા—(સ્પષ્ટ છે.)

કૃત્ય ૧૨.

કાટખુણ ત્રિકોણનો કર્ણ અને એક બાજુ આપ્યાં હોય, તે પરથી ત્રિકોણ કાઢવો.



પક્ષ—બ કર્ણ છે, ક બાણુ છે.

રચના—ક જેટલી એક બંધ લીટી દોરો. આ લીટીની સાથે કાટખુણો કરનારી ક્ષરબંધ અમર્યાદ લીટી દોરો. અં મધ્યબિંદુ અને બ ત્રિજ્યા લઈને ક્ષરબંધ લીટીને ક અને હમાં છેદે એવો કોંસ દોરો. અંક અને અંહ સાંધો.

અંબક અને અંબહ માગ્યા પ્રમાણે ત્રિકોણ છે.

સિદ્ધતા—(સ્પષ્ટ છે.)

૧૨મા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. એક કાટખુણુ ત્રિકોણની કાટખુણો કરનારી એક બાણુ અને કાટખુણાના શિરોબિંદુમાંથી કર્ણ પર દોરેલો લંબ એ આપેલાં છે; તે પરથી તે ત્રિકોણ દોરો.

૨. એક કાટખુણુ ત્રિકોણનો કર્ણ, અને બીજી બે બાણુઓનો સરવાળો, એ આપેલાં છે, તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૮મી ૧૨ સુધીનાં કૃત્યો પરના પરચુરણ પ્રશ્ન.

૧. નીચે આપેલા પક્ષ ઉપરથી ત્રિકોણ બનાવો:—

- (૧) \angle બ=૩૦°, બ=૨", ક=૪";
- (૨) \angle બ=૧૩૫°, ક=૩", બ=૭";
- (૩) \angle બ=૪૫°, ક=૩", બ=૭";
- (૪) અ=૪", \angle બ=૨૭°, \angle ક=૬૮°;
- (૫) અ=૫", \angle અ=૨૭°, \angle ક=૧૮°;
- (૬) બ=૩", \angle ક=૧૮°, \angle બ=૮૮°.

૨. એક સમઘ્રિબાણુ ત્રિકોણની પરિમિતિ અને ઉચાઈ આપેલી છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૩. એક સમઘ્રિબાણુ ત્રિકોણનો પાયો અને તેની સામેના ખુણો આપેલા છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૪. એક સમઘ્રિબાણુ ત્રિકોણનો પાયો, અને પાયાની સામેના ખુણાનો તથા પાયાની પાસેના એક ખુણાનો સરવાળો આપેલા છે; તો તે ત્રિકોણ કાઢો.

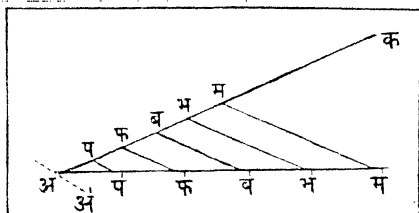
૫. એક સમદ્વિબાણુ ત્રિકોણની ઉંચાઈનો અને એક બાણુનો સરવાળો તથા પાયો એ બે આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૬. એક સમદ્વિબાણુ ત્રિકોણના પાયાની દિશા અને ત્રણ બાણુ પૈકી દરેક બાણુમાંના એક બિંદુનું સ્થાન એ આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણ દોરો.

૭. ત્રિકોણનો પાયો, ઉંચાઈ, અને તેની આસપાસ દોરેલા વર્તુળની ત્રિજ્યા એ ત્રણ આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણ કાઢો.

કૃત્ય ૧૩.

આપેલી લીટીના અમુક સરખા ભાગ કરવા.



પક્ષ—અમ આપેલી લીટી છે.

સાધ્ય—તેના અમુક (પાંચ) ભાગ કરવા છે.

રચના—અમની સાથે સાંકડો ખુણો કરનારી ગમે તે અક અમર્યાદ લીટી દોરો. કંપાસ લઈને તેના બે છેદા એક બીજાથી જરા આધા રાખીને અથી શરૂ કરીને અક લીટીના અપ, પફ, ફવ, વમ મમ એવા પાંચ સરખા ભાગ એક પછી એક લો. મમ સાંધો, મ,વ,ફ,પ બિંદુઓમાંથી મમને સમાંતર અને અમને છેદનારી મમ, વવ, ફફ, પપ લીટીઓ દોરો.

અપ, પફ, ફવ, વમ, મમ આ માગેલા ભાગ છે.

અમાં થઈને વવને સમાંતર અમ દોરો.

[સિદ્ધતા-: અબ, પપ, ફફ, બબ, મમ, મમ, આ સમાંતર છે, અને તેમને છેદનારી અક લીટીના અપ, પપ.....આ ગાળાઓ સરખા છે.

∴ અમ લીટીના અપ, પપ...આ ગાળાઓ પણ સરખા છે. (પ્ર. ૨૪)

૧૩મા કૃત્ય પરના પ્રશ્ન.

૧. આપેલી લીટીના ત્રણ સરખા ભાગ કરો.
૨. આપેલી લીટીનો $\frac{૨}{૩}$ ભાગ કાપી કાઢો.
૩. આપેલી લીટીનો $\frac{૨}{૫}$ ભાગ કાપી કાઢો.
૪. આપેલી અબ લીટીના ક બિંદુમાં એવા બે ભાગ કરો,

$$\frac{૩}{૫} \frac{\text{અક}}{\text{કબ}} = \frac{૩}{૫}.$$

૫. તેરમા કૃત્યની આકૃતિમાં $\frac{\text{ફફ}}{\text{પપ}} = ૨$, અને $\frac{\text{મમ}}{\text{પપ}} = ૪$ છે એમ સિદ્ધ કરો.

પરિશિષ્ટ અ.

પરચુરણ પ્રશ્ન.

૧. ચતુષ્કોણના અ,બ,ક,ડ અનુક્રમે ચાર ખુણા છે. હવે જો અ અને બ મળીને ક અને ડના સરવાળાની બરાબર હોય, તો આ ચતુષ્કોણની બે બાજુઓ એક બીજીને સમાંતર છે એમ બતાવી આપો.

૨. * સમઢિબાજુ ત્રિકોણના પાયાની સામેના ખુણાની પાસેના બહારના ખુણાને દુભાગનારી લીટી પાયાને સમાંતર હોય છે.

૩. અબકડઈ એક નિયમિત પંચકોણ છે. તેમાં અક, અડ સાંધા. બક, ઈડને લંબાવીને ફમાં મળવા દો. ફકડ અને અકડ ત્રિકોણો એકરૂપ છે એમ બતાવી આપો.

૪. * ત્રિકોણના બહારના ખુણાને દુભાગનારી લીટી જો તેની એક બાજુને સમાંતર હોય, તો તે ત્રિકોણ સમઢિબાજુ હોય છે.

૫. ત્રિકોણના બે અંદરના ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ એક બીજીને કદી પણ કાટખુણે છેદતા નથી.

૬. અવ, કઢ સમાંતર લીટીઓ છે, અને તેમની વચ્ચે ૫ એક ખિંદુ છે; તો \angle વપઢ = \angle અવપ + \angle કઢપ એમ બતાવી આપો.

૭. * સમઘ્રિયાળુ ત્રિકોણના પાયાના બે છેડામાંથી સામી બાળુઓ પર લંબ દોરેલા છે; તો તે લંબ પાયાની સાથે જે ખુણા કરે છે, તેમાંના દરેક ખુણો પાયાની સામેના ખુણાથી અર્ધો છે એ સિદ્ધ કરો.

૮. અવક ત્રિકોણના અ ખુણાને દુભાગનારી લીટી વકને ઢમાં મળે છે, અને વકને ફ સુધી વધારેલી છે; તો \angle અવક + \angle અકફ = ૨ \angle અઢક એ સિદ્ધ કરો.

૯. ત્રિકોણની અવ,અક બાળુઓ અનુક્રમે ઢ અને ફમાં દુભાગેલી છે; અને વફ,કઢ અનુક્રમે ૫ અને ગ સુધી એવી રીતે વધારેલી છે કે ફફ = વફ, અને ઢગ = કઢ થાય છે; તો ૫અગ એક સીધી લીટી છે એ બતાવી આપો.

૧૦. * સમઘ્રિયાળુ ત્રિકોણના સરખા ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓની વચ્ચેના ખુણો, પાંચો વધારવાથી ચતુષ્કોણના ખુણાની બરાબર હોય છે.

૧૧. અવક ત્રિકોણના વ અને ક ખુણાને દુભાગનારી લીટીઓ ઢમાં મળે છે; તો \angle વઢક = $180^\circ + \frac{1}{2}A$ છે એમ બતાવી આપો.

૧૨. વકની એકબાજુ બાળુએ અવક એક સમબાળુ અને ઢવક એક સમઘ્રિયાળુ એવા બે ત્રિકોણ દોરેલા છે, અને \angle વઢક = $\frac{1}{2} \angle$ વઅક છે; તો અઢ = વક છે એમ બતાવી આપો.

૧૩. અવક ત્રિકોણની વક, કઅ,અવ બાળુઓમાં ક્ષ,ચ,જ ખિંદુઓ એવાં લીધાં છે, કે \angle વઅક્ષ = \angle કવચ = \angle અકજ; તો બતાવી આપો કે અક્ષ, વચ, કજ આ એક ખિંદુમાં થઈને ન જતી હોય, તો તેમનાથી જે ત્રિકોણ થાય છે તે અને અવક ત્રિકોણ એ બેના ખુણાઓ અનુક્રમે સરખા છે.

૧૪. અવકઢ કાટખૂણુ ચતુષ્કોણની એક નાની (અવ) બાળુમાં એક ૫ ખિંદુ છે; તો એવા એક સમબાળુ ચતુષ્કોણ કાઢો, કે તેનું એક શિરોખિંદુ ૫ થાય, અને બાકી રહેલાં શિરોખિંદુઓ કાટખૂણુ ચતુષ્કોણની બાકીની બાળુઓ ઉપર પડે.

૧૫. અવક ત્રિકોણની વક બાજુ ઢ સુધી વધારી છે. કઈ, \angle અવકને દુભાગે છે અને અવકને ફેરમાં મળે છે. ફેરમાં થઈને વકને સમાંતર લીટી દોરી, તે અવકને ફેરમાં અને અવકને દુભાગનારી લીટીને ગમાં મળે છે; તો ફેર = ફગ છે એમ બતાવી આપો.

૧૬. અવક સમબાજુ ત્રિકોણની અવ, વક, કઅ બાજુઓમાં અનુક્રમે પ, દ, ર બિંદુઓ એવાં લીધાં છે, કે અપ = વદ = કર છે; તો \triangle પવર સમબાજુ છે એમ બતાવી આપો.

૧૭. એક વર્તુળના અઅ, વવ, કક વ્યાસ છે; તો \triangle અવક $\equiv \triangle$ અવક છે એ સિદ્ધ કરો.

૧૮. અવક ત્રિકોણની અવ, વક બાજુઓ પણ ત્રિકોણની બહાર અવફગ, વકફઈ યોરસ દોરેલા છે; તો \triangle અવક $\equiv \triangle$ વકવક એમ બતાવી આપો.

૧૯. અવક ત્રિકોણની ત્રણે બાજુ પર ત્રિકોણની બહાર વકઢ, કઅઈ, અવફ એ સમબાજુ ત્રિકોણો કાઢેલા છે; તો અઢ = વઈ = કફ એમ બતાવી આપો.

૨૦. ક્ષયમાંના મ બિંદુથી ક્ષયની બંને બાજુએ મપ, મદ આ સરખી લીટીઓ એવી રીતે દોરેલી છે, કે \angle યમપ = \angle યમદ છે; તો \triangle પક્ષય $\equiv \triangle$ દક્ષય છે એમ બતાવી આપો.

૨૧. અવકઢ યોરસ છે. તેની એકેક બાજુમાંથી અઈ, વફ, કગ, ઢહ આ સરખા કકડા કાપી કાઢેલા છે; તો ફેર, ફ, ગ, હ આ એક યોરસનાં શિરોબિંદુઓ છે એમ સિદ્ધ કરો.

૨૨. અવક ત્રિકોણની અવ, અક બાજુઓ સરખી છે. અવક ત્રિકોણની બહાર અવ, અક પર અઢવ, અઈવ સમબાજુ ત્રિકોણો દોરેલા છે. વઈ, કઢ એક બીજીને મમાં છેદે છે; તો બતાવી આપો કે મઢ = મઈ.

૨૩. અવકઢઈ એક નિયમિત પંચકોણ છે. અ, વ બુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ મમાં મળે છે; તો મક, મઢ, મઈ અનુક્રમે ક, ઢ, ફેર બુણાને દુભાગે છે, અને મ બિંદુ પંચકોણનાં સર્વ શિરોબિંદુઓથી સરખે અંતરે છે, એમ બતાવી આપો.

૨૪. અવક સમખાણુ ત્રિકોણ છે. ચકને વધારીને તેમાં ૬ ખિંદુ લીધું છે; તે તે ચ કરતાં અને વધારે પાસે છે એમ બતાવે.

૨૫. ક્ષયક કાટખુણુ ત્રિકોણમાં ક્ષય=ક્ષય છે. \angle ચને દુભાગનારી ચર લીટી ક્ષયને રમાં મળે છે. હવે જે ચક પર રન લંબ દોર્યો હોય, તે રન=ક્ષર છે એમ બતાવે.

૨૬. અવક લીટીમાંના ચ ખિંદુમાંથી ચઢ,ચઢે જે સરખી લીટીઓ એવી દોરી છે, કે ઢચઢે કાટખુણો થયો છે. અક પર ઢફ, ઈહ લંબો દોરેલા છે; તે ઢફ=ચહ છે એમ બતાવે.

૨૭. જે સમઢિખાણુ ત્રિકોણોના પાયાની સામેના ખુણા સરખા છે, અને પાયાની સામેના ખુણામાંથી પાયા પર દોરેલા લંબો સરખા છે; તે તે ત્રિકોણો એકરૂપ છે એમ બતાવે.

૨૮. અવક ત્રિકોણની અવ અને અક બાણુઓ બરાબર છે. અવમાં ૬ ખિંદુ લે. ક અને ઈ સુધી વધારો, અને અઈને અઢ બરાબર કરો. હવે ઈઢને વધારી હોય તે તે ચકને કાટખુણુ છેદે છે એમ બતાવી આપો.

૨૯. જેનું મધ્યખિંદુ મ છે એવા એક વર્તુળની અવ ન્યા ક સુધી વધારી છે; અને ચક, અમની બરાબર કરી છે. કમ લીટી વર્તુળને ઢમાં છેદે છે, અને વધારવાથી ફરી તેને ઈમાં છેદે છે; તે \angle અમઈ, \angle ચમઢથી ત્રણગણો છે એમ બતાવી આપો.

૩૦. એક વર્તુળના અવ અને કઢ ગમે તે બે વ્યાસ છે. ચ ખિંદુમાંથી એક લીટી કઢને સમાંતર દોરી છે. આ લીટી અવની સાથે જે ખુણા કરે છે, તે કચ, ઢચ લીટીઓથી દુભગાય છે એમ બતાવી આપો.

૩૧. * અવક ત્રિકોણના ચ અને ક એ સરખા ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ સામી બાણુઓને અનુક્રમે ઈ અને કમાં મળે છે; તે ઈફ, ચકને સમાંતર છે એમ બતાવી આપો.

૩૨. અવકઢ ચતુષ્કોણમાં અવ=કઢ, અને \angle ચ= \angle ક; તે ચકને અઢ સમાંતર છે એમ બતાવી આપો.

૩૩. ઉપલા પ્રશ્નમાંના અવકઢ ચતુષ્કોણના કઈ સરખા છે એ બતાવી આપો.

૩૪. અવકઢ ચતુષ્કોણમાં \angle અ= \angle બ, અને \angle ક= \angle દ;
તો અઢ=અક છે એ બતાવો.

૩૫. * અવક ત્રિકોણમાં અવ=અક. વક પર દોરેલો લંબ
અવ અને અક બાજુ પૈકી ગમે તે એક બાજુને ઢમાં અને બીજી
બાજુના વધારેલા ભાગને ફમાં છેદે છે; તો \triangle અઢઈ સમદ્વિબાજુ
છે એમ બતાવી આપો.

૩૬. પદર સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણની પદ, પર સરખી બાજુઓમાં
પથી સરખે અંતરે ક્ષ અને ચ બિંદુઓ લીધાં છે. વચ, રક્ષ એક
બીજીને ક્ષમાં છેદે છે; તો ક્ષદર, ક્ષક્ષચ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણો છે
એ સિદ્ધ કરો.

૩૭. અવક ત્રિકોણની વક બાજુમાં (જરૂર લાગે તો વધારીને)
ઢ બિંદુ એવું લીધું છે, કે વઅઢ અને અવઢ ખુણા સરખા થયા
છે. અઢવ ખુણાને દુભાગનારી લીટી અકને (અથવા તેના વધારેલા
ભાગને) ફમાં મળે છે; તો \angle અઢઈ = \angle વઢઈ છે એમ બતાવો.

૩૮. અવક સમબાજુ ત્રિકોણના વ અને ક ખુણા અનુક્રમે
વઢ અને કઢથી દુભાગાયા છે. અવને સમાંતર ઢઈ દોરેલી છે,
અને તે વકને ફમાં મળે છે. અકને સમાંતર ઢફ દોરેલી છે, અને
તે વકને ફમાં મળે છે; તો વઈ, ફફ, ફક સરખી છે એમ બતાવો.

૩૯. અવક સમદ્વિબાજુ કાટખુણુ ત્રિકોણ છે. તેનો અવ કર્ણ
છે. અઢ એ \angle વઅકને દુભાગનારી અને વકને ઢમાં મળનારી
લીટી છે; તો અક+કઢ=અવ એ બતાવી આપો.

૪૦. * કાટખુણુ ત્રિકોણનો એક સાંકડો ખુણો બીજા સાંકડા
ખુણાથી બમણો હોય, તો કર્ણ બીજા એમાંની નાની બાજુથી બમણો
હોય છે.

૪૧. એક ચતુષ્કોણની ચારે બાજુઓ અનુક્રમે બીજા ચતુષ્કોણની
ચારે બાજુની બરાબર હોય, અને એકનો એક ખુણો બીજાના તેને
મળતા આવતા ખુણાની બરાબર હોય, તો તે ચતુષ્કોણો એકરૂપ હોય છે.

૪૨. વક પાયાની બંને બાજુએ અવક અને ઢવક એકરૂપ
ત્રિકોણો છે, અને તેમની એક બીજીને મળતી આવતી બાજુઓ
પાયાના એકજ છેડામાં મળે છે; તો વક, અઢને કાટખુણુ દુભાગે
છે એમ સિદ્ધ કરો.

૪૩. અવક અને હવક એ બે ત્રિકોણો. વક પાયાની એકજ બાજુએ છે. જો અવ = હક અને અક = હવ હોય, તો અહ, વકને સમાંતર છે એમ બતાવેા.

૪૪. * કાટખુણુ ચતુષ્કોણમાં પાસપાસેની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુ-ઓને સાંધનારી લીટીઓથી થતી આકૃતિ સમબાજુ ચતુષ્કોણ હોય છે.

૪૫. અવક ત્રિકોણમાં અવ = અક છે. અવમાં ગમે ત્યાં ફેં બિંદુ લઈને તેને વકના મધ્યબિંદુ હની સાથે સાંધ્યું છે; તો અક અને અફની બાદબાકી હફ અને હવની બાદબાકી કરતાં મોટી છે એ સિદ્ધ કરેા.

૪૬. અવકહફ પટ્ટકોણ છે; તો તેની પરિમિતિ અકફ ત્રિકોણની પરિમિતિથી વધારે છે એમ બતાવેા.

૪૭. ત્રિકોણની સૌથી મોટી બાજુ કરતાં લાંબી લીટી ત્રિકોણની અંદર કોઈ પણ ઠેકાણે દોરી શકાશે નહિ એમ બતાવેા.

૪૮. અવક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણમાં હ એક બિંદુ છે; તો હઅ, હવ, હક લીટીઓથી ત્રિકોણ બની શકશે એમ બતાવેા.

૪૯. સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનો એક કર્ણ દરેક બાજુથી હંમેશાં મોટો હોય છે, (પણ દરેક ચતુષ્કોણના સંબંધમાં એ સત્ય લાગુ પડતું નથી).

૫૦. સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણમાંની સરખી બાજુઓ પૈકી દરેક બાજુ ત્રીજી બાજુથી મોટી હોય, તો સરખી બાજુઓની વચ્ચેનો ખુણો સમબાજુ ત્રિકોણના ખુણા કરતાં નાનો હોય છે એમ બતાવેા.

૫૧. અવક ત્રિકોણમાં અ સૌથી મોટો ખુણો છે; તો એમ બતાવી આપો કે જેની બાજુઓ અવ, અક, અને રવક બરાબર હોય એવો ત્રિકોણ દોરવો અશક્ય છે.

૫૨. અવક ત્રિકોણના વ અને ક સાંકડા ખુણા છે; અને \angle ક $>$ \angle વ છે. વકમાં પ એક બિંદુ છે; તો અવથી અપ નાની છે એમ બતાવેા. અકથી અપ નાની હોવા માટે પ ક્યાં હોવું જોઈએ?

૫૩. વર્તુળમાંના ક બિંદુમાં થઈને અવ વ્યાસ જાય છે, અને અકમાં વર્તુળનું મધ્યબિંદુ મ છે; તો નીચેની બાબતો સિદ્ધ કરેા:—

(૧) કથી પરિધ સુધી જે લીટીઓ દોરી શકાય તે સર્વમાં કબ મોટી છે.

(૨) કથી પરિધ સુધી જે લીટીઓ દોરી શકાય તે સર્વમાં કબ નાની છે.

(૩) કમાંથી કક્ષ અને કય આ બે ગમે તે લીટીઓ પરિધ સુધી દોરેલી હોય, અને જો \angle કમક્ષ \angle \angle કમય હોય, તો \angle કક્ષ \angle \angle કય; અને

(૪)—ઉપલા (૩)નો વ્યત્યાસ.

૫૪. એક વર્તુળનો અબ વ્યાસ છે, અને તેને વર્તુળની બહારના ક બિંદુ સુધી વધાર્યો છે. વર્તુળનું મધ્યબિંદુ મ છે; તો નીચેની બાબતો સિદ્ધ કરો:—

(૧) કથી પરિધ સુધી જે લીટીઓ દોરી શકાય તે સર્વમાં કબ મોટી છે.

(૨) કથી પરિધ સુધી જે લીટીઓ દોરી શકાય તે સર્વમાં કબ નાની છે.

(૩) કમાંથી કક્ષ અને કય પરિધ સુધી દોરેલી છે, અને \angle ક્ષમક \angle \angle યમક છે; તો \angle કક્ષ \angle કબ; અને

(૪)—ઉપલા (૩)નો વ્યત્યાસ.

૫૫. અબક સમબાળુ ત્રિકોણમાં મ એક બિંદુ છે. જો \angle મઅબ \angle \angle મઅક હોય, તો \angle મકબ \angle \angle મવક છે એ સિદ્ધ કરો.

૫૬. * સમબાળુ ચતુષ્કોણની પાસપાસેની બાજુઓનાં મધ્ય-બિંદુઓ સાંધ્યાં હોય તો કઈ આકૃતિ થાય છે ?

૫૭. સમાંતરબાળુ ચતુષ્કોણના અંદરના ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓથી જે કાટખુણ ચતુષ્કોણ થાય છે, તેના કણો સમાંતરબાળુ ચતુષ્કોણની બાજુઓને સમાંતર હોય છે અને તેમની બાદબાકીની બરાબર હોય છે.

૫૮. અબકહ સમાંતરબાળુ ચતુષ્કોણના અક કણમાં પ અને દ બિંદુઓ એવાં લીધાં છે, કે અપ=કદ છે; તો અપહદ સમાંતર-બાળુ ચતુષ્કોણ છે એમ બતાવી આપો.

૫૯. અવની એકજ બાળુએ અવકહ અને અવક્ષય આ બે સમાંતરબાળુ ચતુષ્કોણો દોરેલા છે; તો બતાવો કે કહયક્ષ સમાંતરબાળુ ચતુષ્કોણ છે.

૬૦. અવકહ સમાંતરબાળુ ચતુષ્કોણનો અક કર્ણુ ઈ સુધી એવી રીતે વધાર્યો છે, કે કઈ=કઅ થાય છે. ઈમાંથી કબને સમાંતર ઈફ દોરેલી છે, અને તે વધારેલી હક લીટીને કમાં મળે છે; તો અવક સમાંતરબાળુ ચતુષ્કોણ છે એમ બતાવો.

૬૧. અવકહ સમાંતરબાળુ ચતુષ્કોણની અવ, વક, કહ, હઅ બાળુઓમાં અનુક્રમે ઈ, ફ, ગ, હ બિંદુઓ એવાં લીધાં છે, કે અહ = કફ અને અઈ = કગ; તો ઈફગહ સમાંતરબાળુ ચતુષ્કોણ છે એમ બતાવો.

૬૨. * અવ લીટીનું ક મધ્યબિંદુ છે. અ,વ,કથી અનુક્રમે અક્ષ, વય, કક્ષ લંબો આપેલી લીટી પર દોરેલા છે. જો અ અને વ આપેલી લીટીની એકજ બાળુએ હોય, તો એમ બતાવો કે અક્ષ + વય = ૨કક્ષ છે.

૬૩. * કિપલા પ્રશ્નમાં અ અને વ જો આપેલી લીટીની સામ-સામી દિશાએ હોય, તો અક્ષ-વય=૨કક્ષ છે એમ બતાવો.

૬૪. અવક ત્રિકોણમાં અ ખુણાને દુભાગનારી લીટી, અને વકને દુભાગનારો લંબ, એ એકમેકને હ બિંદુમાં છેદે છે; અને હમાંથી અવ અને અક પર (૭૪૨૨ હોય તો એ બાળુઓને વધારીને) હક્ષ, હય લંબો દોરેલા છે; તો અક્ષ = અય અને વક્ષ = વય એ સિદ્ધ કરો.

૬૫. અવક એક સમબાળુ ત્રિકોણ છે, અને અવમાં હ એક ગમે તે બિંદુ છે. અહ પર કથી વિરુદ્ધ બાળુએ અહઈ સમબાળુ ત્રિકોણ દોર્યો છે, તો વઈ=કહ છે એમ બતાવો.

૬૬. અવક ત્રિકોણમાં વમાંથી અકને મળનારી અને કમાંથી અવને મળનારી એવી બે લીટીઓ દોરી હોય, તો તે એક બીજને દુભાગી શક્તી નથી એમ બતાવો.

૬૭. વક પાયા પર અવક અને હવક ત્રિકોણો છે, અને અહ ॥ વક છે. હવે અવક સમદ્વિબાણુ ત્રિકોણ હોય, તો તેની પરિમિતિ હવક ત્રિકોણની પરિમિતિથી ઓછો છે એમ બતાવો.

૬૮. અવકહ ચોરસ છે. અમાંથી વક અને કહનાં મધ્યબિંદુઓ સુધી, અને કમાંથી હવ અને અવનાં મધ્યબિંદુઓ સુધી લીટીઓ દોરેલી છે; તો તે લીટીઓથી થતી આકૃતિ સમબાણુ ચતુષ્કોણ છે એમ બતાવો.

૬૯. અવક ત્રિકોણના અ શિરોબિંદુમાંથી વક પાયા સુધી અહ, અઈ લીટીઓ એવી દોરી છે, કે \angle વઅહ = \angle ક અને \angle કઅઈ = \angle વ થાય છે; તો અમાંથી વક પર દોરેલો લંબ હઈને દુભાગે છે એમ સિદ્ધ કરો.

૭૦. અવક ત્રિકોણની અવ બાણુના હ મધ્યબિંદુમાંથી વકને સમાંતર હઈ દોરેલી છે, અને અવક બાણુને વઈ દુભાગે છે; તો \angle અઈવ કાટખુણો છે એમ બતાવો.

૭૧. અવક સમદ્વિબાણુ ત્રિકોણના પાયાની સામેનો ખુણો અ અર્ધ કાટખુણો છે, અને અ અને વમાંથી સામી બાણુ પર દોરેલા અહ અને વઈ લંબો ફમાં મળે છે, તો ફઈ=ઈક છે એમ બતાવો.

૭૨. અહ લીટી અવક ત્રિકોણના અ આગળના બહારના ખુણાને દુભાગે છે. કમાંથી અહ પર દોરેલો લંબ અહને નમાં મળે છે. વકનું મ મધ્યબિંદુ છે; તો મન=૩ (અવ+અક) છે એમ બતાવો.

૭૩. અવકહ ચતુષ્કોણની અવ,હક બાણુઓની બરાબર અને તેમને સમાંતર જેની બાણુઓ હોય, એવો એક ત્રિકોણ દોર્યો છે; અને તેજ ચતુષ્કોણની અહ, કવની બરાબર અને તેમને સમાંતર જેની બાણુઓ હોય એવો બીજો ત્રિકોણ દોર્યો છે; તો તે ત્રિકોણોના પાયા સરખા છે એમ બતાવી આપો.

૭૪. અવક ત્રિકોણના બહારના અ ખુણાને દુભાગનારી લીટીમાં ગમે ત્યાં પ બિંદુ છે; તો સિદ્ધ કરો કે અવ+અક < પવ=પક.

૭૫. અવકહઈફગહ નિયમિત અષ્ટકોણ છે, અને તેમાં અફ, વઈ કહ, હગ લીટીઓ દોરી છે; તો તેમનાં છેદનબિંદુઓ એક ચોરસનાં શિરોબિંદુઓ છે એમ બતાવો.

૭૬. અહ લીટી અવક ત્રિકોણના અ ખુણાને દુભાગે છે. કમાંથી અહ પર કાઢેલો લંબ અહને નમાં મળે છે, અને વકનું મ મધ્યબિંદુ છે; તો બતાવો કે મન=૩ (અવ-અક).

૭૭. અવક ત્રિકોણની અવ, અક બાજુઓમાં અનુક્રમે ડ, ઈ બિંદુઓ લીધાં છે; અને વર્ડ, કડ લીટીઓ ફમાં મળે છે; તો $\text{ડઅ+અઈ} > \text{ઈફ+ફડ}$ એમ બતાવો.

૭૮. ચતુષ્કોણની સામસામી બે બાજુઓ અથવા પાસપાસેની બે બાજુઓ સરખી હોય, તો બાકીની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓ સાંધનારી લીટી સરખી બાજુઓની સાથે સરખા ખુણા કરે છે.

૭૯. અવક ત્રિકોણમાં અવ=અક. વકમાં ડ ગમે તે એક બિંદુ છે. વડ, ડકનાં મધ્યબિંદુઓમાંથી વક પર દોરેલા લંબો વઅ, અકને અનુક્રમે હ અને જમાં મળે છે; તો સિદ્ધ કરો કે $\text{હવ}=\text{અજ}$ અને $\text{અહ}=\text{કજ}$ છે.

૮૦. એક લીટીમાં અ,વ,ક બિંદુઓ હારબંધ એવાં લીધાં છે કે અવ=૧ વક. વ મધ્યબિંદુ ધારી ૧અવ ત્રિજ્યાએ એક વર્તુળ કાઢ્યું છે. તેના પરિધ પર પ એક ગમે તે બિંદુ લીધું છે, અને અ,પ બિંદુઓને સાંધનારી લીટી વધારીને પદ=અપ કરી છે. હવે દવ, દક સાંધો અને \angle વદક કાટખુણા છે એમ બતાવો.

૮૧. અવક ત્રિકોણની વક બાજુનું ડ અને અડનું ઈ, મધ્ય-બિંદુ છે. વર્ડ વધારવાથી તે અકને ફમાં મળે છે; તો અફ=૧અક છે એમ બતાવો.

૮૨. અવક એક ત્રિકોણ છે. વકનું ડ મધ્યબિંદુ છે. અકમાં ફ બિંદુ એવું લીધું છે, કે અફ=૧અક થાય છે. અડ, વક એક બીજીને ઈમાં છેદે છે; તો અડનું ઈ મધ્યબિંદુ છે, અને ઈફ=૧વફ છે એમ બતાવી આપો.

૮૩. એક ત્રિકોણમાં એવો એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ દોરો કે તેના કોણ ત્રિકોણમાં આપેલા એક બિંદુમાં એક બીજીને છેદે.

૮૪. અવકડ ચતુષ્કોણમાં પ બિંદુ ક્યાં લીધું હોય તો પઅ+પવ+પક+પડ નો સરવાળો ઓછામાં ઓછો થશે?

૮૫. ચતુષ્કોણ આકારના કાગળના ખુણા વાળવાથી તેમનાં શિરોબિંદુઓ એકજ બિંદુમાં મળે, અને કાગળ બધે ઠેકાણે બેવડો થાય, એટલા માટે કાગળનો આકાર કેવો હોવો જોઈએ?

૮૬. અવ પાથો અને અમાંથી પડતો વક ઉપરનો લંબ આપેલા છે; તો અવક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ કાઢો.

૮૭. આપેલાં બે બિંદુઓથી સરખે અંતરે હોય એવી, આપેલા એક ત્રીજા બિંદુમાંથી એક સીધી લીટી દોરો.

૮૭(અ). એક આપેલા બિંદુમાંથી એવી એક લીટી દોરો કે જે એક બીજાને છેદનારી બીજા બે લીટીઓની સાથે સરખા ખુણા કરે.

૮૮. જે ત્રિકોણની બે બાજુઓ આપેલી બે લીટીઓની બરાબર હોય, અને આ બે બાજુઓ પૈકી એકની સામેના ખુણા આપેલા ખુણા બરાબર હોય, એવો ફક્ત એકજ ત્રિકોણ ક્યારે બને છે ?

૮૯. અથવા ત્રિકોણના બે શિરોબિંદુમાંથી ચક્રને સમાંતર ડાહ્યા લીટી એવી દોરો કે $\text{ડાહ્યા} = \text{ચક્ર} + \text{કાંઈ}$ થાય.

૯૦. અથવા એક ત્રિકોણ છે, અને અમાંથી ચક્રને સમાંતર એક લીટી કાઢી છે, તો અમાંથી ચક્રને વમાં મળે એવી અને ઉપલી સમાંતર લીટીને વમાં મળે એવી એક લીટી એવી રીતે દોરો કે અપ લીટી પદના $\frac{1}{2}$ બરાબર થાય.

૯૧. કહ લીટીની એકજ બાજુએ અ અને અ બિંદુઓ છે. કહમાં એવું એક બિંદુ શોધી કાઢો, કે (૧) તે બિંદુથી અ અને અનાં અંતરોની બાદબાકી ઓછામાં ઓછી થાય; અને (૨) તે અંતરોનો સરવાળો ઓછામાં ઓછો થાય.

૯૨. અથવા એક આપેલો ત્રિકોણ છે, અને ડાહ્યા, વગ આ આપેલી લીટીઓ એક બીજાને છેદે છે; તો અથવા ત્રિકોણની સાથે એકરૂપ હોય એવો, અને જેની એક બાજુ ડાહ્યા પર પડે અને એક શિરોબિંદુ વગ પર પડે, એવો ત્રિકોણ શી રીતે દોરવો તે બતાવો.

૯૩. અથવા ત્રિકોણના બે શિરોબિંદુમાંથી એવી એક લીટી દોરો કે તે પર અ અને અમાંથી દોરેલા લંબો ૧ : ૨ આ પ્રમાણમાં હોય.

૯૪. ચાર બાજુઓ અને એક ખુણા આપ્યાં છે, તે ઉપરથી ચતુષ્કોણ દોરો.

૯૫. અ અને અ બિંદુઓ કહ લીટીની (૧) સામસામી દિશાએ છે એમ ધારીને, અને (૨) એકજ બાજુએ છે એમ ધારીને, કહમાં વ બિંદુ એવું શોધી કાઢો, કે $\angle \text{અવક} = \angle \text{અવક}$ થાય.

૯૬. પાયાની સામેના ખુણા અને પાયાની પાસેના એક ખુણા એ બેના સરવાળો આપ્યો છે; તો આપેલા પાયા પર સમદ્વિબાજી ત્રિકોણ કાઢો.

૯૭. ત્રિકોણના એક શિરોબિંદુમાંથી સામે બાજુને મળનારી એવી એક લીટી દોરો કે તે પર બાકીના બે શિરોબિંદુઓમાંથી દોરેલા લંબો સરખા થાય.

૯૮. અથવા ત્રિકોણની અથ અને અક આ સરખી બાજુઓમાં ક્ષ અને ચ બિંદુઓ એવાં લો, કે $બક્ષ = ક્ષચ = ચક$ થાય.

૯૯. એક આપેલા બિંદુમાંથી એવી એક લીટી કાઢો, કે આપેલી બે સમાંતર લીટીઓની વચ્ચેના તેના ગાળો આપેલી લંબાઈના થાય. એમ કરવું ક્યારે અશક્ય થાય છે?

૧૦૦. નીચેના પક્ષ ઉપરથી ત્રિકોણ બનાવો:—

(૧) અ+ચ, ક, \angle અ.

(૨) ચ-ક, અ, \angle ક.

(૩) ક, \angle ચ અને પરિમિતિ.

(૪) કાટખુણુ ત્રિકોણના એક સાંકડો ખુણો અને પરિમિતિ.

(૫) ચ+ક, અ, \angle અ.

(૬) ચ-ક, અ, \angle અ.

(૭) અ, ક-ચ, \angle ક- \angle ચ.

(૮) અ, ક+ચ, \angle ક+ \angle ચ.

(૯) અ, \angle અ, \angle ચ- \angle ક.

(૧૦) અ=૨", \angle અ=૪૦°, \angle ચ- \angle ક=૨૦°.

(૧૧) અ+ચ=૩", ક=૨.૬", \angle ક=૧૨૦°.

(૧૨) અ=૪", ક-ચ=૧.૪૫", \angle અ=૬૦°.

(૧૩) અ+ચ=૩.૭", ક=૧.૭૫", \angle અ=૬૨°.

(૧૪) પરિમિતિ=૫", \angle અ=૪૨°, \angle ચ=૩૬°.

(૧૫) ક=૨.૪", ચ-અ=૧.૬", \angle ચ- \angle અ=૬૫°.

(૧૬) ચ=૧.૧", ક+અ=૩.૧", \angle ક- \angle અ=૬૦°.

પરિશિષ્ટ ૬.



પ્રશ્નો છોડવાની પદ્ધતિ.

જેમ શસ્ત્રનો ઉપયોગ કરતાં આવડ્યા સિવાય શસ્ત્ર હાથમાં હોય તોપણ તે ન હોય તેના જેવુંજ છે, તેમજ જ્ઞાનના સંબંધમાં પણ છે; એટલે કે જ્ઞાનનો ઉપયોગ કરતાં આવડ્યા સિવાય જ્ઞાન હોય અથવા ન હોય તે સરખુંજ છે. માટે જે જ્ઞાન વિદ્યાર્થીઓને આપવામાં આવ્યું હોય, તે જ્ઞાનનો ઉપયોગ કરતાં તેમને શીખવવું જોઈએ. ભૂમિતિના વિષયમાં જ્ઞાનનો ઉપયોગ કરવો એટલે પ્રશ્ન છોડવા એજ છે. તેથી કરીને ભૂમિતિના વિષયમાંના જ્ઞાનનો છોડવા એને ઉપયોગ કરતાં આવડે, એટલા માટે ભૂમિતિમાંના પ્રશ્ન છોડવાની શક્તિ છોડવાઓમાં કૃત્ય કરવાની જરૂર છે.

તેમ છતાં પણ આ પ્રશ્નો શી રીતે છોડવા એ એક મોટી મુશ્કેલી છે. વિદ્યાર્થીઓને પહેલવહેલા પ્રશ્ન આપવામાં આવે, કે તેઓ ગભરાઈ જાય છે, અને પ્રશ્ન છોડવાની કોઈ પણ રીત તેમને ન આવડતી હોવાથી તેમનો એવો અભિપ્રાય થાય છે, કે પ્રશ્નનો ઉત્તર આવડવો એ એક નસીબની વાત છે. પરંતુ ખરી વાત એમ નથી. પ્રશ્ન છોડવામાં કૃતેહમંદ કિતરવા માટે સ્વાભાવિક યુદ્ધિ એક આવશ્યક ગામત છે; પણ પ્રશ્ન છોડવાની પદ્ધતિની માહિતી અને મહાવરો એ જાણતો પણ તેટલીજ અગત્યની છે. માટે આ પદ્ધતિથી છોડવા એને જાણીતા કર્યા હોય, અને તેમને પ્રશ્ન છોડવાની ટંક પડે, તો તેઓ આ કામમાં ઘણા આગળ વધશે. આ પ્રશ્ન છોડવાની પદ્ધતિ કઈ તે આગળ જણાવ્યું છે, તોપણ તે પદ્ધતિનું વર્ણન કરતાં પહેલાં એટલું કહેવું અવશ્યનું છે, કે બીજી કોઈ પણ ઇષ્ટ વસ્તુ પ્રાપ્ત કરવાની યુક્તિ શોધી કાઢવાની આપણી હંમેશની જે પદ્ધતિ છે, તે પદ્ધતિનું અને આ પદ્ધતિનું તત્ત્વ એકજ છે. જ્યારે કોઈ જાણત આપણે સિદ્ધ કરવી હોય છે, ત્યારે તે સિદ્ધ કરવાની યુક્તિ જોળતી વખતે આપણે સાધારણ રીતે જ્ઞેતાં નીચે પ્રમાણે યત્ન કરીએ છીએ. પ્રથમ આપણે એવો વિચાર કરીએ છીએ, કે એક ઇષ્ટ જાણત અ સિદ્ધ કરવા માટે તેનું સાધન શું આપણે પ્રાપ્ત કરવું જોઈએ; અને શું મેળવવા માટે શું પ્રાપ્ત કરવું જોઈએ. પરંતુ આમાંથી કોઈ પણ સાધન આપણને અનુકૂળ નથી એવું આપણને માલમ પડે છે,

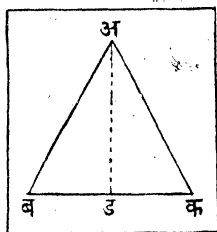
એટલે આ કારણોની પરંપરાની વધારે શોધ કરવી જોઈએ એમ આપણને લાગે છે. એવી શોધ કરતાં કરતાં કનું સાધન હ છે, અને હનું સાધન ક છે, અને ક આપણને અનુકૂળ છે, એમ જણાઈ આવે છે. પછી આપણે એવો વિચાર નક્કી કરીએ છીએ, કે ક આપણને અનુકૂળ છે, માટે ક પરથી હ, અને હ પરથી ક અનુકૂળ કરી લેવું; અને ક અનુકૂળ થયું એટલે તે પરથી જ અને જ પરથી અ સિદ્ધ કરી લેવું. દાખલા તરીકે એકાદ નોકરી જોઈતી હોય, અને તે વગથી અથવા ભલામણથી મળવા જેવી હોય, તો આપણે એવો વિચાર કરીએ છીએ, કે મને નોકરી આપવી અ અધિકારીના હાથમાં છે, તે અધિકારી પાસે જનું વજન છે, જ, કનો સ્નેહી છે, પણ કની સાથે અમારે કંઈ સ્નેહ નથી; માટે કના સ્નેહીઓમાં અથવા સ્નેહીઓના સ્નેહીઓમાં આપણી ઓળખાણવાળો કોઈ છે કે નહિ એની તપાસ કરવી જોઈએ. એવી રીતે તપાસ કરતાં કના સ્નેહીઓમાં આપણો ઓળખીતો માણસ જડયો, એટલે તેની મારફતે કને મળી, કની મદદથી જને અને જની મદદથી અને આપણે અનુકૂળ કરી લઈએ છીએ. એજ પદ્ધતિ (૬૪ વસ્તુ પ્રાપ્ત કરવાની) આપણી બીજી બધી યુક્તિઓમાં દેખાય છે; એટલે કે કોઈ પણ ૬૪ વસ્તુ પ્રાપ્ત કરવાની આપણી હંમેશની રીત એવી હોય છે, કે તે વસ્તુ પ્રાપ્ત કરાવ એવાં સાધનોની પરંપરાની આપણે તપાસ કરતા જઈએ છીએ, અને તે સાધનોમાંનું એકાદ સાધન આપણા તાબામાંનું અથવા આપણું જણીતું જણાયું, એટલે તે સાધન મારફતે આપણે ૬૪ વસ્તુ મેળવીએ છીએ. એજ માર્ગ આપણે ભૂમિતિમાં સ્વીકારવો પડે છે. આ રીતનું પૃથક્કરણ કરીએ તો સાર નીચે પ્રમાણે જણાઈ આવે છે. જે બાબત સિદ્ધ કરવી છે, તે સિદ્ધ થઈ ગઈ છે, એવી કલ્પના કરીને તે સિદ્ધ કરવામાં કંઈ બાબતો સાધનરૂપ છે, એની આપણે શોધ કરીએ છીએ; અને એવી શોધ કરતાં કરતાં ધારેલી વસ્તુ મેળવવામાં આધારભૂત હોય એવી આપણા તાબામાંની અથવા આપણી જણીતી વાત જડી આવે છે, એટલે તેને આધારે આપણે ૬૪વસ્તુ તરફ જઈએ છીએ. આ પ્રમાણે સાધ્ય વસ્તુ (નાં સાધનો)નું પ્રથમ પૃથક્કરણ અને પૃથક્કરણ કરી આધાર જડયો એટલે તે આધારે એકીકરણ, આ બે ક્રિયાઓ દરેક પ્રયત્નમાં આવશ્યક હોય છે. હવે એજ તત્ત્વ ભૂમિતિને લાગુ કરીએ, તો કોઈ પણ પ્રશ્ન છોડવાની રીત નીચે પ્રમાણે હોવી જોઈએ એમ જણાઈ આવશે.

જે સત્ય સાબીત કરવાનું હોય, અથવા જે રચના કરવાની હોય, તે સત્ય સિદ્ધ થયું છે, અથવા તે રચના બની ગઈ છે, એમ પ્રથમ ધારવું. પછી તે સિદ્ધ થવા માટે કઈ સાધનભૂત બાબતો સિદ્ધ થવી જોઈએ એનો વિચાર કરવો. તે બાબતો સમજાય, એટલે તે સિદ્ધ થવા માટે બીજી કઈ બાબતો સિદ્ધ થવી જોઈએ એનો વિચાર કરવો. એવો વિચાર કરતાં કરતાં, જે બાબત પ્રમેયના પક્ષ પરથી આપણા જાણવામાં હોય, તેની સાથે સાધનોની પરંપરાનો સંબંધ જોડવો. છેક પક્ષ સુધી ઉપલી સાધનપરંપરાનો સંબંધ નક્કી થયો, એટલે ઉલટો ક્રમ સ્વીકારી સિદ્ધ કરવું હોય તે સિદ્ધ કરવું.

પૃથક્કરણપદ્ધતિનાં ઉદાહરણ.

ઉદાહરણ ૧.

સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાની સામેના ખુણાને દુભાગનારી લીટી પાયાના બે ભાગમાં ભાગ કરે છે.



અબક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે, અને તેના પાયાની સામેનો ખુણો દુભાગનારી લીટી અડ છે. તે ડ બિંદુમાં બકના બે ભાગમાં ભાગ કરે છે, એવું આપણે સિદ્ધ કરવું છે એમ ધારો.

પૃથક્કરણ.

બડ, ડકની બરાબર છે એમ ધારીએ, તો તે વાત સિદ્ધ થવા માટે પહેલાંનાં કયાં કારણો અનુકૂળ હોવાં જોઈએ? બે લીટીઓ અરસપરસ સરખી છે એમ નક્કી થવા માટે (૧) તે બંને કોઈ ત્રીજી લીટીની બરાબર, અથવા તેના કોઈ અમુક અંશ, અથવા તેનાથી અમુકગણી હોવી જોઈએ; (૨) અથવા તે એકજ ત્રિકોણ.

માંના બે સરખા ખુણાની સામેની બાજુઓ હોવી જોઈએ; (૩) અથવા બે એકરૂપ ત્રિકોણોની સંગત બાજુઓ હોવી જોઈએ..... વગેરે. આમાંની પહેલી કલ્પનાને કોઈ આધાર જડતો નથી. બીજી કલ્પનાને પણ આધાર નથી. માત્ર ત્રીજી કલ્પનાને આધાર મળવાનો સંભવ લાગે છે. હવે આ કલ્પના ખરી ઠરવા માટે, એટલે \triangle અડક અને \triangle અડક એકરૂપ ઠરવા માટે, કઈ બાબતો ખાસ જરૂરની છે? બે ત્રિકોણ એકરૂપ કરવા માટે બંનેની ત્રણે બાજુઓ અરસ-પરસ સરખી જોઈએ, અથવા બેની બબ્બે બાજુઓ અને તેમની વચ્ચેના ખુણા એ સરખાં હોવાં જોઈએ, અથવા.....વગેરે. આમાંની પહેલી કલ્પના સંભવતી નથી, પણ બીજી કલ્પના તો વસ્તુસ્થિતિની સાથે પુરેપુરી મળતી આવે છે. કારણ કે પક્ષ પ્રમાણે અડ, અડ બાજુઓ અને \angle બઅડ અનુક્રમે અડ, અડ બાજુઓ અને \angle કઅડની બરાબર છે.

બડ અને કડ એક બીજીની બરાબર સિદ્ધ કરવા માટે જે પૂર્વ કારણો આવશ્યક હતાં, તેમની પરંપરા જેતાં તેમાંના એક પગથીઆનો સંબંધ પક્ષની સાથે મળતો આવે છે, એવું જણાઈ આવે છે; માટે આ પગથીઆથી પાછળ પાછળ જઈએ, તો આપણે સિદ્ધ કરવાની બાબત પર જઈ પહોંચીએ એ ખુલ્લું છે.

એકીકરણ.

∴ બઅડ અને અકડ ત્રિકોણોમાં—

બઅ = અડ;

અડ બંનેમાં સાધારણ;

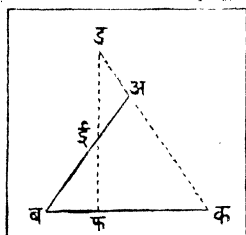
\angle બઅડ = \angle કઅડ;

∴ \triangle બઅડ \equiv \triangle કઅડ.

∴ બડ = કડ.

ઉદાહરણ ૨.

અડક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે; તેની કડ બાજુ ડ સુધી વધારી છે; અડમાંથી અડ જેટલો ઘટાડો લાગ કાપી કાઢ્યો છે; બકને ક બિંદુમાં મળતાં સુધી ઘટાડો વધારી છે; તે \angle અડક એક કારખુણો છે એમ સિદ્ધ કરો.



પૃથક્કરણ.

\angle ડફક કાટખુણો છે એમ ધારો. તેમ ધારીએ તો—

$$\angle$$
 ડફક = \angle ફકફ + \angle ડકફ. (પ્ર. ૮)

પણ \angle ડફક = ફઈ + \angle ઘઈફ; (પ્ર. ૮, ઉ. ૨)

$$\therefore \angle$$
 ફકફ + \angle ડકફ = \angle ફઈ + \angle ઘઈફ (= \angle અઈક).

પણ \angle ડકફ = \angle ફઈ.

\therefore ઉપલા સમીકરણમાંથી આ ખુણા લઈ લીધા હોય તો—

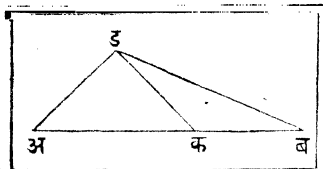
$$\text{શેષ } \angle$$
 ફકફ = શેષ \angle અઈક.

હવે \angle ફકફ = \angle અઈક એ પક્ષ છે; માટે અહીંથી ઉલટા ક્રમે જવાથી \angle ડફક કાટખુણો છે એમ સિદ્ધ થશે.

અંકીકરણ (સ્પષ્ટ છે.)

ઉદાહરણ ૩.

આપેલી લીટીના એવા બે ભાગ કરવા, કે તેમાંના એક પરનો ચોરસ બીજા પરના ચોરસથી બમણો થાય.



પથકરણ.

અવ આપેલી લીટી છે. ધારો કે તેના ક ગિંદુમાં માગ્યા પ્રમાણે ભાગ થયા છે.

હવે જો $અક^૨ = ૨બક^૨$ હોય, તો અક જેનો દર્જુ હોય એવા સમદ્વિબાણુ કાટખુણુ ત્રિકોણની એક બાણુના વર્ગની બરાબર થકનો વર્ગ હોવો જોઈએ.

એવો અવડ ત્રિકોણ કાઢો, એટલે કે \angle અકડ, \angle કઅડ દરેક ૪૫° નો કરો.

$$\therefore કડ^૨ = ક.બ^૨,$$

$$\therefore કડ = ક.બ,$$

$$\therefore \angle વડક = \angle ક.વડ.$$

$$\therefore અડ = કડ,$$

$$\therefore \angle ડઅક = \angle ડકઅ = \frac{૧}{૨} કાટખુણો;$$

$$(\text{કારણ કે } \angle અડક = ૧ કાટખુણો.) \quad (\text{રચના})$$

$$\therefore \angle ડક.વ બહારનો ખુણો = ૧\frac{૧}{૨} કાટખુણો, \quad (\text{પ્ર. ૧})$$

$$\therefore \angle કડ.વ + \angle ક.વડ = \frac{૩}{૨} કાટખુણો. \quad (\text{પ્ર. ૮})$$

$$\therefore \angle ક.વડ = \frac{૧}{૨} કાટખુણો, \text{ અને } \angle વ.ડ.વ = \frac{૧}{૨} કાટખુણો.$$

હવે અવડ ત્રિકોણના \angle વઅડ અને \angle અવડ આપણે જાણીએ છીએ, અને ડક.વ ત્રિકોણના પણ બધા ખુણા જાણીએ છીએ. તેથી આ ત્રિકોણ કાઢી શકાશે; અર્થાત્ ક ગિંદુનું સ્થળ પણ કાઢી શકાશે.

એકીકરણ.

$$\angle વઅડ \frac{૧}{૨} કાટખુણો બરાબર કરો.$$

$$\angle અવડ \frac{૧}{૨} કાટખુણો બરાબર કરો.$$

$$\angle વડક \frac{૧}{૨} કાટખુણો બરાબર કરો.$$

ક ઇષ્ટ ગિંદુ છે.

ક્રમવિરુદ્ધ સિદ્ધતા.

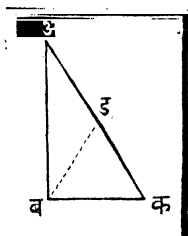
કોઈ કોઈ વખતે સાધ્ય સિદ્ધ કરવા માટે ક્યાં કારણો અનુકૂળ હોવાં જોઈએ એનો વિચાર કરવા કરતાં, સાધ્ય ખોટું છે એમ ધારવાથી કઈ અસંભવિત બાબતો અથવા પક્ષથી વિરુદ્ધ બાબતો

ઉત્પન્ન થાય છે, તેનો વિચાર કરીને, સાધ્ય સિવાય બીજી દરેક કલ્પના પક્ષને વિરુદ્ધ હોવાથી સાધ્ય સિવાય બીજી કોઈ પણ બાબત સંભવતી નથી, એવી સિદ્ધતા આપની વધારે સહેલી પડે છે.

તેમ છતાં, જ્યાં સાધ્યને ફક્ત એક કે બે વિરુદ્ધ હોય છે ત્યાંજ આ પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરવો સગવડ બરેલો હોય છે, એ ધ્યાનમાં રાખવું જોઈએ.

ઉદાહરણ.

કાટખુણ ત્રિકોણમાં કાટખુણાના શિરોબિંદુમાંથી કર્ણના મધ્યબિંદુ સુધી દોરેલી લીટી કર્ણના અર્ધ બરાબર હોય છે.



પક્ષ—અવક કાટખુણ ત્રિકોણ છે. ડ, અકનું મધ્યબિંદુ છે.

સાધ્ય—બડ = અડ = ડક.

સિદ્ધતા—કડ અથવા અડની બરાબર બડ ન હોય, તો તેનાથી નાની કે મોટી હોવી જોઈએ. એ સિવાય ત્રીજી સ્થિતિ સંભવતી નથી. તે નાની હોય તો—

\angle બઅડ $<$ \angle અવડ થાય,

અને \angle બકડ $<$ \angle કવડ થાય,

એટલે $(\angle$ બઅડ + \angle બકડ) $<$ \angle અવક થાય;

અને મોટી હોય તો—

$(\angle$ બઅક + \angle બકઅ) $>$ \angle અવક થાય.

પણ એમાંની એક પણ બાબત શક્ય નથી;

કારણ કે \angle અવક = ૧ કાટખુણો છે; અર્થાત્ \angle બઅક +

\angle બકઅ = \angle અવક છે.

માટે બડ, અડથી નાની પણ નથી, અને મોટી પણ નથી; એટલે બંને સરખી છે.

ઉત્તરો.

(નીચે આપેલા કેટલાક ઉત્તરો ખરા ઉત્તરોની લગભગના છે. વિદ્યાર્થીએ માપણી કરીને આપવાના ઉત્તરોમાં $\frac{1}{8}$ ઇંચ જેટલી અથવા એકાદ અંશ જેટલી ચૂક હોય તો તે ગણવા જેવી નથી.)

પૃષ્ઠ ૧૩-૧૫.

- પ્ર. ૧. ૧.૬"; ૪૦ મિ. મી,
 પ્ર. ૪. પહેલી લીટી=૪૦ મિ. મી; ૧.૬".
 બીજી લીટી=૪૯ મિ. મી; ૧.૯૫".
 પ્ર. ૫. અક=૦.૮"; કઢ=૦.૪"; અવ=૧.૨".
 પ્ર. ૬. અક=૦.૬"; કઢ=૦.૪"; ઢવ=૦.૩"; અવ=૧.૩".
 પ્ર. ૭. અવ=૧.૭૫"; અક=૦.૮૫"; કઢ=૦.૯".

પૃષ્ઠ ૧૮-૨૦.

- પ્ર. ૨. પહેલું વૃક્ષ=૩', ૨"; બીજું વૃક્ષ=૨', ૧૩"; ત્રીજું વૃક્ષ=૨', ૭".
 પ્ર. ૩. ૭૦૦ ફુટ.
 પ્ર. ૧૧. ૧૦'. પ્ર. ૧૨. ૪૧'. પ્ર. ૧૩. ૩૭.૨'.
 પ્ર. ૧૪. ૯.૭૫ માઇલ. પ્ર. ૧૫. ૭.૨ માઇલ.
 પ્ર. ૧૬. ૧૩.૩૭૫ માઇલ. પ્ર. ૧૭. ૩.૭૫ માઇલ.
 પ્ર. ૧૮. ૪૦૦'.

પૃષ્ઠ ૪૨-૪૪.

- પ્ર. ૧. પૂર્વની ઉત્તરે ૬૦°; ઉત્તરની પશ્ચિમે ૩૦°.
 પ્ર. ૨. વાયવ્ય ખુણો.
 પ્ર. ૩. પશ્ચિમની ઉત્તરે ૨૬'.
 પ્ર. ૪. ૫.૧૨૫ માઇલ; પશ્ચિમની દક્ષિણે ૬૧".
 પ્ર. ૫. ૬૩ માઇલ; પૂર્વની ઉત્તરે ૨૫".
 પ્ર. ૬. ૨૮.૭૫ માઇલ; દક્ષિણની પશ્ચિમે ૯'.
 પ્ર. ૭. દક્ષિણની પૂર્વે ૩૬"; ૩.૯૫ માઇલ.
 પ્ર. ૮. ૪૦.૬૨૫ માઇલ.
 પ્ર. ૯. લગભગ ૧૨૨૫ ફુટ.
 પ્ર. ૧૦. ૬ સે. મી. પ્ર. ૧૧. ૫૭૩ મ્યુમિટ.

(સમાપ્ત)

